Compositio Mathematica **133:** 323–353, 2002. 323

Hauteurs normalisées des sous-variétés de produits de modules de Drinfeld

(Normalized Heights of the Subvarieties of Products of Drinfeld Modules)

VINCENT BOSSER
Mathematisches Institut, Universität Basel, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel, Switzerland.
e-mail: bosser@math.unibas.ch

(Received: 25 April 2001; accepted: 5 October 2001)

Abstract. After establishing some important results on the usual height of projective varieties in positive characteristic, we construct a normalized height for subvarieties of products of Drinfeld modules and investigate its properties. In case the Drinfeld modules are pairwise isogeneous, we obtain in particular that the normalized height vanishes exactly on torsion varieties, that is on translates of sub-T-modules by torsion points.

Mathematics Subject Classifications (2000). 11G09, 11G50.

Key words. diophantine geometry, Drinfeld module, T-module, height, normalized height.

1. Introduction

L'utilisation en transcendance et en approximation diophantienne d'une notion de hauteur pour certaines classes de variétés affines ou projectives définies sur un corps de nombres est maintenant devenue classique. La façon usuelle et la plus simple de définir la hauteur d'une variété quasi-projective V définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ consiste à prendre pour celle-ci la hauteur logarithmique absolue de Weil d'une forme de Chow de la variété. Si la variété V est une sous-variété d'un tore $\mathbb{G}_m^n$ ou d'une variété abélienne A, on peut aussi définir une *hauteur normalisée* $\hat{h}(V)$, par un processus de limite à la Néron–Tate à partir de la hauteur projective "naïve", comme l'ont montré Philippon ([Ph3]), puis David et Philippon ([Da-Ph2]). Dans le cas des variétés abéliennes, et lorsque la variété est réduite à un point, cette hauteur coïncide bien entendu avec la hauteur de Néron–Tate.

Nous nous proposons dans ce travail de définir, dans le cadre d'un T-module produit de modules de Drinfeld, une hauteur normalisée $\hat{h}(V)$ pour les sous-variétés de $\mathbb{G}_a^n$, et d'en étudier les propriétés. Rappelons que dans le cas des points Denis ([De2]) avait déjà défini une telle hauteur. Notre construction suit une démarche analogue à celle adoptée dans [Ph3] et conduit à toutes les propriétés usuelles d'une hauteur normalisée. La question naturelle est alors, comme en caractéristique zéro, de caractériser les variétés de hauteur normalisée nulle. Rappelons que dans le cas des variétés abéliennes, cette question est étroitement liée à la conjecture de Bogomolov, comme l'a remarqué Zhang ([Zh1]). De façon précise, Zhang a montré que la conjecture de Bogomolov est équivalente à la propriété suivante (“propriété du $\hat{h}$”) : une sous-variété d'une variété abélienne est de hauteur normalisée nulle si et seulement si c'est un translaté d'une sous-variété abélienne par un point de torsion. Les deux problèmes ont depuis été résolus : d'abord par Ullmo ([Ul]) et Zhang ([Zh2])—qui ont prouvé la conjecture de Bogomolov—puis peu après par David et Philippon ([DaPh1])—qui ont eux prouvé la propriété du $\hat{h}$—en utilisant des méthodes d'approximation diophantienne classiques. Nous donnerons à la fin de ce travail (théorème 8.1), en s'inspirant des méthodes de [Ph5], une preuve de la propriété du $\hat{h}$ dans notre cadre, lorsque tous les modules de Drinfeld sont isogènes entre eux, et sous l'hypothèse que la conjecture de Lang–Manin–Mumford est vraie (mais la preuve de celle-ci vient d'être annoncée par Scanlon, *cf.* [Sc]).

L'article est organisé comme suit. Au § 2 on rappelle brièvement les résultats sur les formes résultantes dont nous aurons besoin. Après avoir défini la hauteur “naïve” d'une variété plongée dans un espace projectif, on en établit alors aux §§ 3 et 4 quelques propriétés importantes. Le § 3 sera utilisé pour la construction des hauteurs normalisées et l'établissement de leurs propriétés, alors que le § 4 ne servira qu'à la fin, dans la preuve de la propriété du $\hat{h}$. Aux §§ 5 et 6, on introduit alors une notion de “bon plongement” dans un espace projectif, ce qui nous permet ensuite d'établir quelques propriétés supplémentaires de la hauteur naïve, nécessaires pour la suite. C'est seulement pour un tel bon plongement que l'on pourra définir, au § 7, une hauteur normalisée qui lui est associée. Le § 8 enfin démontre la propriété du $\hat{h}$ sous les conditions énoncées ci-dessus. La preuve s'inspire des méthodes de transcendance de [Ph5] (où l'auteur prouve la propriété du $\hat{h}$ pour une variété abélienne isogène à un produit de courbes elliptiques) et repose sur les résultats des §§ 4 et 7.

2. Rappels sur les formes résultantes

Soient k un corps infini, $X_0, \ldots, X_N$ des indéterminées (N entier $\geqslant 1$), et $R = k[X_0, \ldots, X_N]$. On désignera parfois par X la collection des indéterminées $X_0, \ldots, X_N$. On note encore $\mathfrak{M} = (X_0, \ldots, X_N)$ et, pour $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$, on pose $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_N$ et $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \cdots X_N^{\alpha_N}$.

Si $I \subset R$ est un idéal homogène, on désigne par $\mathrm{ht}(I)$ sa hauteur (algébrique), autrement dit $\mathrm{ht}(I) = N + 1 - \dim(R/I)$, et si K est un surcorps de k algébriquement clos, on note $\mathcal{Z}_K(I)$, ou plus simplement $\mathcal{Z}(I)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'ensemble des zéros de l'idéal I dans $\mathbb{P}_N(K)$.

On sait que pour tout idéal homogène $I \subset R$ de hauteur $N + 1 - r$ ($0 \leqslant r \leqslant N + 1$) et tout r-uplet $d = (d_1, \ldots, d_r)$ de $(\mathbb{N}^*)^r$, on peut définir la notion de *forme résultante d'indice d de I*. Nous renvoyons à [Ph6] et [Re] pour une exposition détaillée de la théorie. Nous nous contenterons ici, par commodité pour le lecteur, de rappeler sans démonstration les résultats que nous utiliserons. Il nous faut pour cela introduire quelques notations supplémentaires, qui seront d'un usage constant dans la suite.

Soient donc $I \subset R$ un idéal homogène, $r \in [0, N+1]$ l'entier défini par $\mathrm{ht}(I) = N + 1 - r$, et $d = (d_1, \ldots, d_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ fixé. On introduit de nouvelles indéterminées u_α^j, $1 \leqslant j \leqslant r$, $\alpha \in \mathbb{N}^{N+1}$, $|\alpha| = d_j$, ainsi que les polynômes homogènes génériques $U_1, \ldots, U_r$, de degrés $d_1, \ldots, d_r$ respectivement, définis par $U_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{N+1}, |\alpha| = d_j} u_\alpha^j X^\alpha$. On notera u l'ensemble des variables u_α^j, et de même, à j fixé, on notera u^j l'ensemble des indéterminées $\{u_\alpha^j \mid |\alpha| = d_j\}$. Enfin, on désigne par $d(I)$ le degré de l'idéal I, c'est-à-dire $d(I) = \lim_{\ell \to +\infty} \frac{(r-1)!}{\ell^{r-1}} \dim_k (R/I)_\ell$.

Avec ces notations, on sait qu'une forme résultante d'indice d de I est un polynôme homogène f de $k[u]$, non nul, et qui est, pour chaque entier $j \in \{1, \ldots, r\}$, homogène par rapport au groupe de variables u^j, de degré $d^o_{u^j} f = d(I) \prod_{i \neq j} d_i$ ([Re], prop. III.2.2). De plus, deux formes résultantes d'indice d de I sont égales à une constante non nulle de k près. En particulier, lorsque $r = 0$, une forme résultante d'indice d de I est simplement un élément de k^* (dans ce cas $\mathfrak{M} \subset \sqrt{I}$ et $k[u] = k$). Rappelons encore que la forme résultante est invariante par extension des scalaires, autrement dit que si K est une extension de k, alors toute forme résultante d'indice d de I est aussi une forme résultante d'indice d de l'idéal étendu $I.K = I \otimes_k K \subset K[X_0, \ldots, X_N]$.

On dispose également de la propriété de décomposition utile suivante des formes résultantes.

PROPOSITION 2.1. *Soient $I \subset R$ un idéal homogène de hauteur $\mathrm{ht}(I) = N + 1 - r$ et $d = (d_1, \ldots, d_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers associés de R/I de hauteur $N + 1 - r$, et $f_1, \ldots, f_s$ des formes résultantes d'indice d de $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ respectivement. Alors $f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s}$ est une forme résultante d'indice d de I, où $n_i = \ell_{R_{\mathfrak{p}_i}}\big((R/I)_{\mathfrak{p}_i}\big)$ désigne la longueur du $R_{\mathfrak{p}_i}$-module $(R/I)_{\mathfrak{p}_i}$.*

Démonstration. Voir [Re], théorème III.2.1. □

Signalons encore les deux résultats importants suivants.

PROPOSITION 2.2 (théorème de l'élimination). *Soient $I \subset R$ un idéal homogène de hauteur $\mathrm{ht}(I) = N + 1 - r$ et $d = (d_1, \ldots, d_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$. On suppose que les idéaux premiers associés minimaux de R/I sont tous de même hauteur $N + 1 - r$, et on note $f \in k[u]$ une forme résultante d'indice d de I. Alors, pour toute spécialisation des variables u_α^j (morphisme de k-algèbres) $\rho : k[u] \to K$ dans une extension algébriquement close K de k, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\rho(f) = 0$.
(ii) $\mathcal{Z}_K(I) \cap \mathcal{Z}_K(\rho(U_1)) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}_K(\rho(U_r)) \neq \emptyset$ *dans* $\mathbb{P}_N(K)$.

(On prolonge ρ en un morphisme $\rho : R[u] \to K[X]$ en posant $\rho(X_j) = X_j$ pour tout j.)

Démonstration. Voir [Ph1], prop. 1.5 ou [Re], th. III.1. Noter que dans ces références l'énoncé est donné pour une forme éliminante, mais formes éliminantes et résultantes ont toujours les mêmes zéros (par ex. [Re] page 41). □

PROPOSITION 2.3 (propriété de spécialisation). *Soient $I \subset R$ un idéal homogène de hauteur* $\mathrm{ht}(I) = N + 1 - r$, $d = (d_1, \ldots, d_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, $p \in R_{d_1}$ *un polynôme homogène de degré d_1 non diviseur de zéro dans R/I (ce qui implique $r \geqslant 1$), J l'idéal de R défini par $J = (I, p)$, et $\rho : k[u^1, \ldots, u^r] \to k[u^2, \ldots, u^r]$ l'homomorphisme de spécialisation défini par $\rho(U_1) = p$. Alors, si f est une forme résultante d'indice d de I, $\rho(f)$ est une forme résultante d'indice $d' = (d_2, \ldots, d_r)$ de J (qui est de hauteur $N + 2 - r$).*

Démonstration. Voir [Re], proposition III.2.4. □

Rappelons aussi que la notion de forme résultante est étroitement liée à celle de forme éliminante (voir par exemple [Ph6] et [Re]). En particulier, lorsque le corps k est algébriquement clos et que l'idéal est premier, les deux notions coïncident. Comme toute forme éliminante d'un idéal homogène premier est toujours irréductible sur k ([Ph1], proposition 1.3 ou [Re], lemme III.1.2), il en résulte que *lorsque k est algébriquement clos, toute forme résultante d'indice d d'un idéal homogène premier de R est irréductible sur k* (si k est quelconque, la forme résultante est simplement une puissance de la forme éliminante).

Nous utiliserons encore le résultat suivant, qui résulte de [Re], prop. III.1.4.

PROPOSITION 2.4. *Soient $I \subset R$ un idéal homogène de hauteur* $\mathrm{ht}(I) = N + 1 - r$ *tel que $\mathfrak{M} \not\subset \sqrt{I}$ (alors $r \geqslant 1$), et f une forme résultante d'indice d de I. On suppose que k est algébriquement clos. Si $\rho : k[u^2, \ldots, u^r] \to L$ est un morphisme de k-algèbres dans une extension algébriquement close L de k, alors il existe des points $x_1, \ldots, x_t \in L^{N+1} \setminus \{0\}$ (non nécessairement distincts) et $\lambda \in L$ tels que $\rho(f) = \lambda \prod_{1 \leqslant i \leqslant t} U_1(x_i)$. Si de plus tous les premiers associés minimaux de R/I ont même hauteur et $\rho(f) \neq 0$, alors on peut prendre $\lambda = 1$, et l'on a, en notant $W = \mathcal{Z}_L(\rho(I)) \subset \mathbb{P}_N(L)$ et $H_j = \mathcal{Z}_L(\rho(U_j)) \subset \mathbb{P}_N(L)$ $(2 \leqslant j \leqslant r)$, $W \cap H_2 \cap \cdots \cap H_r = \{x_1, \ldots, x_t\}$.*

Démonstration. Voir [Re], proposition III.1.4 pour la première partie. Pour la seconde, on constate tout d'abord que puisque $\rho(f) \neq 0$, on a $\lambda \neq 0$, donc on peut faire "rentrer" λ dans un des $U_1(x_i)$ par homogénéité de U_1, *i.e.* on peut prendre $\lambda = 1$. On a alors, pour tout morphisme de L-algèbres $\rho_1 : L[u^1] \to L$ et d'après la proposition 2.2 (on note $H_1 = \mathcal{Z}_L(\rho_1(U_1))$):

$$\begin{aligned} H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_r \cap W \neq \emptyset &\iff \rho_1(\rho f) = 0 \\ &\iff \prod_{1 \leqslant i \leqslant t} \rho_1(U_1)(x_i) = 0 \\ &\iff \{x_1, \ldots, x_t\} \cap H_1 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute hypersurface H_1 de $\mathbb{P}_N(L)$, on en déduit le résultat. □

3. Hauteurs des variétés projectives

On conserve les notations précédentes. On note de plus $A = \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ en l'indéterminée T, $k = \mathbb{F}_q(T)$, et $|\cdot|$ la valeur absolue

$1/T$-adique de k, normalisée par $|\alpha| = q^{\deg\alpha}$, où $\deg\alpha$ désigne le degré de l'élément $\alpha \in k$. On note alors k_∞ le complété de k pour la valeur absolue $|\cdot|$, $\bar{k}_\infty$ une clôture algébrique de k_∞, C le complété de $\bar{k}_\infty$, et $\bar{k}$ la fermeture algébrique de k dans C.

Dans toute la suite, lorsque l'on parlera de variétés sans préciser davantage, il s'agira toujours de variétés sur C quasi-projectives et non nécessairement irréductibles. Si V est une sous-variété quasi-projective d'un espace projectif $\mathbb{P}_N$, on note $\bar{V}$ son adhérence de Zariski et $\mathcal{I}(V)$ l'idéal de $\bar{k}[X] = \bar{k}[X_0, \ldots, X_N]$ engendré par les polynômes homogènes nuls sur V. Si I est un idéal homogène de $\bar{k}[X]$, on désignera par $\mathcal{Z}(I)$ l'ensemble des zéros de l'idéal I dans $\mathbb{P}_N(C)$. Si $V \subset \mathbb{P}_N$ est une sous-variété définie sur $\bar{k}$ telle que $\dim V = r - 1$, et si $d = (d_1, \ldots, d_r)$ est un r-uplet de $(\mathbb{N}^*)^r$, on appellera forme résultante d'indice d de V toute forme résultante d'indice d de l'idéal $\mathcal{I}(V)$ (l'idéal $\mathcal{I}(V)$ étant alors bien de hauteur $N + 1 - r$).

Si K est une extension finie de k telle que $k \subset K \subset C$, et si v est une place de K, on désignera par K_v le complété de K en v, par C_v le complété d'une clôture algébrique de K_v, et par $|\cdot|_v$ la valeur absolue de C_v, normalisée par $|\alpha|_v = q^{-v(\alpha)}$ et $v(K^*) = \mathbb{Z}$ (où v désigne ici la valuation associée à la place v). Si f est un polynôme non nul à coefficients dans C_v, on note encore $M_v(f)$ le maximum des valeurs absolues v-adiques des coefficients de f. Enfin, si f est un polynôme non nul à coefficients dans $\bar{k}$, on note $h(f)$ sa hauteur, c'est-à-dire la hauteur de Weil du point projectif dont les coordonnées homogènes sont les coefficients de f. Rappelons que si K est une extension finie de k qui contient les coefficients de f et si M_K désigne l'ensemble de toutes les places de K, on a:

$$h(f) = \frac{1}{[K:k]} \sum_{v \in M_K} d_v \log_q M_v(f),$$

où d_v est le degré $[\Sigma_v : \mathbb{F}_q]$ du corps résiduel Σ_v de K_v. On a $h(f) \geqslant 0$ et $h(fg) = h(f) + h(g)$ pour tout couple (f, g) de polynômes non nuls à coefficients dans $\bar{k}$ ([Ph1], proposition 1.12).

DÉFINITION 3.1. Soit V une variété plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}_N$ par le morphisme $\varphi : V \hookrightarrow \mathbb{P}_N$, et soit $r = \dim V + 1$. On suppose $\varphi(V) \subset \mathbb{P}_N$ définie sur $\bar{k}$. On définit alors la hauteur de V associée à φ, notée $h_\varphi(V)$, par $h_\varphi(V) = h(f)$, où f est une forme résultante de $\overline{\varphi(V)}$ d'indice $d_0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^r$.

Si φ est simplement l'inclusion ou s'il n'y a pas d'ambiguïté sur φ, on notera plus simplement $h(V)$ au lieu de $h_\varphi(V)$. On remarquera encore que bien que la forme résultante f ne soit définie qu'à une constante de $\bar{k}^*$ près, la hauteur $h(f)$ est quant à elle définie sans ambiguïté (grâce à la formule du produit), ce qui justifie la définition. Jusqu'à la fin du § 4 on ne considère désormais que des variétés projectives.

PROPOSITION 3.2. *Soient $W \subset \mathbb{P}_N$ une variété projective définie sur $\bar{k}$ de dimension $\dim W = r - 1$, $d = (d_1, \ldots, d_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$, et f une forme résultante d'indice d de W. Alors $h(f) = d_1 \cdots d_r h(W)$.*

Démonstration. La preuve est identique à celles de [Ph1], proposition 2.8 ou de [Re], théorème III.3.1. □

Une propriété importante de la hauteur d'une variété projective est qu'on peut la comparer à la hauteur de son image réciproque par un "bon" morphisme. De façon précise on a le résultat suivant:

PROPOSITION 3.3. *Soient $X \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ et $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ deux variétés projectives irréductibles de même dimension, dont les plongements correspondent aux diviseurs D et D' respectivement. Soit $\gamma : X \to Y$ un morphisme surjectif, fini et plat, pour lequel il existe un ouvert non vide U de Y tel que les fibres des éléments de U aient pour cardinal $\kappa \geqslant 1$. Supposons qu'il existe un entier $\Delta \geqslant 1$ tel que $\gamma^* D' \sim \Delta D$ (équivalence linéaire), et que le morphisme γ soit donné par des polynômes $F_0, \ldots, F_M$ de $\bar{k}[X_0, \ldots, X_N]$, homogènes de même degré Δ, et ne s'annulant pas identiquement sur X.*[⋆] *Alors il existe un réel $c > 0$ tel que, pour toute sous-variété fermée $W \subset Y$ définie sur $\bar{k}$, de dimension $r-1$ et vérifiant $W \cap U \neq \emptyset$, on ait:*

$$\left| h(W) - \frac{\Delta^r}{\kappa} h(\gamma^{-1} W) \right| \leqslant c\, d(W).$$

La démonstration de ce résultat s'inspire de celle du lemme 5 de [Ph3] et repose sur les lemmes analogues suivants.

LEMME 3.4. *Soient $X \subset \mathbb{P}_N$ et $Y \subset \mathbb{P}_M$ deux variétés projectives irréductibles définies sur $\bar{k}$, et $\gamma : X \to Y$ un morphisme. On suppose que γ est donné par des polynômes $F_0, \ldots, F_M$ de $\bar{k}[X_0, \ldots, X_N]$, homogènes de même degré $\Delta \geqslant 1$, à coefficients entiers sur A, et ne s'annulant pas identiquement sur X. Alors il existe une extension finie K de k et des éléments non nuls $\Delta_1 \in A$, $\Delta_2 \in K$, satisfaisant, pour toute place v de K et tout point $x = (x_0, \ldots, x_N) \in X(\overline{K_v})$:*

$$|\Delta_2|_v^{-1} \leqslant \frac{\max_{0 \leqslant i \leqslant M} |F_i(x)|_v}{(\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v)^{\Delta}} \leqslant |\Delta_2|_v \qquad \text{si } v \mid \infty$$

$$|\Delta_1|_v \leqslant \frac{\max_{0 \leqslant i \leqslant M} |F_i(x)|_v}{(\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v)^{\Delta}} \leqslant 1 \qquad \text{si } v \nmid \infty$$

Démonstration. Soit $K \subset \bar{k}$ une extension finie de k contenant les coefficients des F_i $(0 \leqslant i \leqslant M)$ et qui soit corps de définition de Y et X. Désignons par $I = \mathcal{I}(X) \subset \bar{k}[X_0, \ldots, X_N]$ l'idéal de définition de X. Les polynômes $F_0, \ldots, F_M$ n'ayant pas de zéro commun dans X, la racine de l'idéal $(I, F_0, \ldots, F_M)$ est égale à $(X_0, \ldots, X_N)$. Il existe donc un entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X_0, \ldots, X_N)^{\ell} \subset (I, F_0, \ldots, F_M)$. En particulier, pour $0 \leqslant j \leqslant N$, on peut écrire:

[⋆] La seconde condition résulte de la première si X est non singulière et projectivement normale, voir [Ha], example 7.8.4 et [Se], cor. 2 de la prop. 3.

$$X_j^\ell = \sum_{0 \leqslant i \leqslant M} p_{ij} F_i + q_j,$$

avec $p_{ij}, q_j \in K[X_0, \ldots, X_N]$ et $q_j \in I$, les p_{ij} étant non tous nuls (sinon on aurait $(X_0^\ell, \ldots, X_N^\ell) \subset I$). Soit alors $\Delta_1 \in A$, $\Delta_1 \neq 0$, tel que $\Delta_1 p_{ij}$ soit à coefficients entiers sur A pour tout i, j. Si v est une place de K et $x = (x_0, \ldots, x_N) \in X(\bar{K}_v)$ est tel que $\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v = 1$, on a alors, en notant $r_{ij} = \Delta_1 p_{ij}$:

$$\Delta_1 x_j^\ell = \sum_{0 \leqslant i \leqslant M} r_{ij}(x) F_i(x) \quad (0 \leqslant j \leqslant N). \tag{$*$}$$

Supposons tout d'abord $v \nmid \infty$. Alors $|r_{ij}(x)|_v \leqslant 1$ pour tout i, j, et donc dans ce cas l'égalité $(*)$ donne $|\Delta_1|_v \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant M} |F_i(x)|_v$. Par ailleurs, on a $|F_i(x)|_v \leqslant 1$ pour tout i puisque F_i est à coefficients entiers. Donc $\max_{0 \leqslant i \leqslant M} |F_i(x)|_v \leqslant 1$, et, par homogénéité, on obtient la deuxième inégalité.

Supposons maintenant $v \mid \infty$. Ecrivons $F_i = \sum_{|\alpha|=\Delta} f_{\alpha i} X^\alpha$ $(0 \leqslant i \leqslant M)$, et choisissons $\Delta_2' \in K$ tel que $|\Delta_2'|_v = \max_{\alpha,i} |f_{\alpha i}|_v$ pour toute place v de K telle que $v \mid \infty$ (ce qui est possible par approximation faible puisque $\max_{\alpha,i} |f_{\alpha i}|_v \neq 0$ pour tout $v \mid \infty$, *cf.* [Ca-Fr], chap. II, § 6, Lemma). On obtient alors l'inégalité:

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant M} |F_i(x)|_v \leqslant |\Delta_2'|_v.$$

Pour la minoration, définissons tout d'abord $\Delta_v \in K$ tel que $|\Delta_v|_v = \max_{\substack{0 \leqslant i \leqslant M \\ 0 \leqslant j \leqslant N}} M_v(r_{ij})$, et choisissons (approximation faible) $\Delta_2'' \in K$ tel que $|\Delta_2''|_v = |\Delta_v|_v$ pour toute place v telle que $v \mid \infty$. On obtient alors, grâce à l'égalité $(*)$ et en tenant compte du fait que $|\Delta_1|_v \geqslant 1$ puisque $\Delta_1 \in A$:

$$\frac{1}{|\Delta_2''|_v} \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant M} |F_i(x)|_v.$$

En prenant alors $\Delta_2 \in K$ tel que $|\Delta_2|_v = \max\{|\Delta_2'|_v, |\Delta_2''|_v\}$ pour toute place infinie v de K, on obtient l'encadrement:

$$|\Delta_2^{-1}|_v \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant M} |F_i(x)|_v \leqslant |\Delta_2|_v,$$

d'où, par homogénéité, la première égalité. □

LEMME 3.5. *Soient $K \subset \bar{k}$ une extension finie de k, N et M deux entiers, $X_0, \ldots, X_N$, $Y_0, \ldots, Y_M$ des indéterminées, $F_0, \ldots, F_M \in K[X_0, \ldots, X_N]$ des polynômes homogènes non nuls de même degré $\Delta \geqslant 1$, et $\mu : K[Y_0, \ldots, Y_M] \to K[X_0, \ldots, X_N]$ le morphisme de K-algèbres défini par $\mu(Y_i) = F_i$, $0 \leqslant i \leqslant M$. Soient $\mathfrak{p} \subset K[X_0, \ldots, X_N]$ un idéal homogène premier tel que $\mathfrak{p} \neq (X_0, \ldots, X_N)$ et de hauteur* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = N + 1 - r$, *et g une forme résultante d'indice $d = (\Delta, \ldots, \Delta)$ de $\mathfrak{p}$. Désignons comme au § 2 par u_i^j, $0 \leqslant i \leqslant M$, $1 \leqslant j \leqslant r$, et par v_α^j, $1 \leqslant j \leqslant r$, $\alpha \in \mathbb{N}^{N+1}$, $|\alpha| = \Delta$, les indéterminées correspondant aux polynômes homogènes génériques*

$$V_j = \sum_{|\alpha|=\Delta} v_\alpha^j X^\alpha \qquad \text{et} \qquad U_j = \sum_{0 \leqslant i \leqslant M} u_i^j Y_i,$$

et soit $\mu^* : K[v] \to K[u]$ *le morphisme de* K*-algèbres tel que* $\mu^*(V_j) = \mu(U_j)$, $1 \leqslant j \leqslant r$. *On suppose enfin* $\mu^* g \neq 0$. *Alors, pour toute place* v *de* K, *on a:*

$$r\Delta^{r-1}\, d(\mathfrak{p}) \log_q(A_v) \leqslant \log_q \frac{M_v(\mu^* g)}{M_v(g)} \leqslant r\Delta^{r-1}\, d(\mathfrak{p}) \log_q(B_v),$$

où

$$A_v = \inf_{\substack{x \in \bar{K}_v^{N+1} \\ x \neq 0}} \frac{\max_{0 \leqslant i \leqslant M} |F_i(x)|_v}{\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v^\Delta} \quad \text{et} \quad B_v = \sup_{\substack{x \in \bar{K}_v^{N+1} \\ x \neq 0}} \frac{\max_{0 \leqslant i \leqslant M} |F_i(x)|_v}{\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v^\Delta}.$$

Démonstration. Définissons, pour $0 \leqslant j \leqslant r$, l'homomorphisme de K-algèbres $\mu_j^* : K[v] \to K[u, v]$ par $\mu_j^*(V_k) = V_k$ si $1 \leqslant k \leqslant j$ et $\mu_j^*(V_k) = \mu(U_k)$ si $j < k \leqslant r$ (de sorte que $\mu_r^* = \mathrm{Id}$ et $\mu_0^* = \mu^*$). Soit $j \in \{1, \ldots, r\}$ et v une place de K. On a $\mu_j^* g \in K[v^1, \ldots, v^{j-1}, u^{j+1}, \ldots, u^r][v^j]$ et $\mu_{j-1}^* g \in K[v^1, \ldots, v^{j-1}, u^{j+1}, \ldots, u^r][u^j]$. Soit alors une spécialisation $\rho_j : K[v^1, \ldots, v^{j-1}, u^{j+1}, \ldots, u^r] \to \bar{K}_v$ telle que $M_v(\rho_j \mu_j^* g) = M_v(\mu_j^* g)$ et $M_v(\rho_j \mu_{j-1}^* g) = M_v(\mu_{j-1}^* g)$ (on prolonge ρ_j de façon naturelle en un morphisme $\rho_j : \bar{K}_v[u, v] \to \bar{K}_v[u, v]$). Posons $s_{j-1} = \rho_j \circ \mu_{j-1}^*$ et $s_j = \rho_j \circ \mu_j^*$. Notons que ces morphismes définissent par restriction la même spécialisation $K[v^1, \ldots, v^{j-1}, v^{j+1}, \ldots, v^r] \to \bar{K}_v$. Nous avons $s_j g = \rho_j \mu_j^* g$ et $\mu_{j-1}^* s_j g = \mu_{j-1}^* \rho_j \mu_j^* g = \rho_j \mu_{j-1}^* g$. Donc

$$M_v(s_j g) = M_v(\mu_j^* g) \quad \text{et} \quad M_v(\mu_{j-1}^* s_j g) = M_v(\mu_{j-1}^* g).$$

Par la proposition 2.4 appliquée à l'idéal étendu $I = \mathfrak{p}.\bar{k}$, il existe des éléments non nuls x_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant t_j$ (t_j entier $\geqslant 1$) de $(\bar{K}_v)^{N+1}$ et $\lambda_j \in \bar{K}_v$ tels que

$$s_j g = \lambda_j \prod_{1 \leqslant i \leqslant t_j} V_j(x_{ij}). \tag{$*$}$$

On remarque maintenant que puisque l'on peut écrire $\mu^* g = \mu^* \mu_j^* g$ et que $\mu^* g \neq 0$ (par hypothèse), on a $\mu_j^* g \neq 0$, et de même $\mu_{j-1}^* g \neq 0$. On déduit de là facilement, pour des raisons d'homogénéité des polynômes par rapport aux groupes de variables u^j ou v^j, que l'on a $d^o_{v^j}(\mu_j^* g) = d^o_{v^j} g$ et $d^o_{u^j}(\mu_{j-1}^* g) = d^o_{v^j} g$. Il vient alors, en notant $\delta = d^o_{v^j} g$, $d^o_{v^j}(s_j g) = d^o_{v^j}(\rho_j \mu_j^* g) = d^o_{v^j}(\mu_j^* g) = \delta$, d'où il suit $t_j = \delta$ et $\lambda_j \neq 0$. Revenant à l'égalité ($*$), on obtient donc:

$$\frac{M_v(\mu_{j-1}^* s_j g)}{M_v(\mu_j^* g)} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant \delta} \frac{M_v(\mu(U_j)(x_{ij}))}{M_v(V_j(x_{ij}))} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant \delta} \frac{\max_{0 \leqslant k \leqslant M} |F_k(x_{ij})|_v}{\left(\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i|_v\right)^\Delta},$$

d'où

$$A_v^\delta \leqslant \frac{M_v(\mu_{j-1}^* g)}{M_v(\mu_j^* g)} \leqslant B_v^\delta \quad \text{pour tout } j \text{ de } \{1, \ldots, r\}.$$

Comme

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{M_v(\mu_{j-1}^* g)}{M_v(\mu_j^* g)} = \frac{M_v(\mu_0^* g)}{M_v(\mu_r^* g)} = \frac{M_v(\mu^* g)}{M_v(g)},$$

il vient finalement

$$A_v^{r\delta} \leqslant \frac{M_v(\mu^* g)}{M_v(g)} \leqslant B_v^{r\delta},$$

d'où la conclusion puisque $\delta = \Delta^{r-1} d(\mathfrak{p})$. □

LEMME 3.6. *Soient $X \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ et $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ deux variétés projectives irréductibles de même dimension, dont les plongements correspondent aux diviseurs D et D' respectivement. Soit $\gamma: X \to Y$ un morphisme surjectif, fini et plat, pour lequel il existe un ouvert non vide U de Y tel que les fibres des éléments de U aient pour cardinal $\kappa \geqslant 1$. Supposons que $\gamma^* D' \sim \Delta D$, où $\Delta \geqslant 1$. Alors, pour toute sous-variété fermée $W \subset Y$ de dimension $r-1$ et vérifiant $W \cap U \neq \emptyset$, on a:*

$$d(\gamma^{-1} W) = \frac{\kappa}{\Delta^{r-1}} d(W),$$

$d(\gamma^{-1} W)$ (resp. $d(W)$) désignant le degré dans $\mathbb{P}_N$ (resp. $\mathbb{P}_M$).

Démonstration. Nous allons procéder comme dans [Hi] ou [De2]. Rappelons que le degré d'une sous-variété fermée $W \subset Y$ est donné par $\deg_0([W].D'^{\dim W})$, où le point désigne le produit d'intersection, où $[W]$ désigne le cycle associé à la variété W et où, pour un cycle $Z = \sum n_P[P]$ de dimension 0, on note $\deg_0(Z) = \sum n_P$ ([Fu], Chap. 2, Example 2.5.2.d). On a alors:

$$\begin{aligned}
\Delta^{r-1} d(\gamma^{-1} W) &= \deg_0([\gamma^{-1} W].(\Delta D)^{r-1}) \\
&= \deg_0(\gamma^*[W].(\gamma^* D')^{r-1}) \\
&= \deg_0(\gamma^*([W].D'^{r-1})) \\
&= \deg_0(\gamma^{-1}([W].D'^{r-1})) \\
&= \kappa \deg_0([W].D'^{r-1}) \\
&= \kappa\, d(W),
\end{aligned}$$

l'avant-dernière ligne provenant du fait que le cycle $[W].D'^{r-1}$ est rationnellement équivalent à un cycle dont le support peut être choisi dans $W \cap U$. □

Démonstration de la proposition 3.3. Remarquons que quitte à multiplier $F_0, \ldots, F_M$ par un dénominateur commun, on peut supposer que les coefficients de $F_0, \ldots, F_M$ sont entiers sur A. D'autre part, il est clair qu'on peut supposer W irréductible : en effet, si l'inégalité est vraie pour les composantes irréductibles de W de même dimension que W, alors elle sera vraie pour W en sommant les différentes inégalités (les fonctions d et h étant additives, voir proposition 2.1). Soient alors f une forme résultante d'indice $d_0 = (1, \dots, 1)$ de $W \subset Y \subset \mathbb{P}_M$, et g une forme résultante d'indice $d = (\Delta, \dots, \Delta)$ de $\gamma^{-1}W \subset X \subset \mathbb{P}_N$. Fixons $K \subset \bar{k}$ une extension finie de k vérifiant les conditions du lemme 3.4, telle qu'en outre les polynômes f et g aient leurs coefficients dans K, et telle que W et toutes les composantes irréductibles de $\gamma^{-1}W$ soient définies sur K. Conservons enfin les notations μ, μ^*, u_i^j, v_α^j, U_j, $V_j \dots$ du lemme 3.5.

Nous allons tout d'abord montrer que $h(\mu^*(g)) = \kappa h(f)$. Pour tout morphisme de spécialisation $\rho : \bar{k}[u] \to C$ des variables u, on a, en notant $\sigma = \rho \circ \mu^* : \bar{k}[v] \to C$ (on prolonge bien sûr μ^* à $\bar{k}[X]$):

$$\begin{aligned}
\rho \circ \mu^*(g) = 0 &\iff \sigma(g) = 0 \\
&\iff \gamma^{-1}W \cap \mathcal{Z}\big(\sigma(V_1)\big) \cap \dots \cap \mathcal{Z}\big(\sigma(V_r)\big) \neq \emptyset \\
&\iff \gamma^{-1}W \cap \mathcal{Z}\big(\rho \circ \mu(U_1)\big) \cap \dots \cap \mathcal{Z}\big(\rho \circ \mu(U_r)\big) \neq \emptyset \\
&\iff \gamma^{-1}W \cap \gamma^{-1}\big(\mathcal{Z}(\rho(U_1))\big) \cap \dots \cap \gamma^{-1}\big(\mathcal{Z}(\rho(U_r))\big) \neq \emptyset \\
&\iff W \cap \mathcal{Z}\big(\rho(U_1)\big) \cap \dots \cap \mathcal{Z}\big(\rho(U_r)\big) \neq \emptyset \\
&\qquad \text{(surjectivité de } \gamma : X \to Y) \\
&\iff \rho(f) = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mu^*(g)$ et f ont les mêmes zéros, donc, f étant irréductible, $\mu^*(g) = \lambda f^\nu$, avec $\nu \geqslant 1$ et $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Mais en reprenant la suite d'équivalences ci-dessus, on voit que pour ρ spécialisation suffisamment générale on a:

$$\begin{aligned}
d^o_{u^r}(\mu^*(g)) = d^o_{v^r} g &= \operatorname{card}\big(\gamma^{-1}W \cap \mathcal{Z}(\sigma(V_1)) \cap \dots \cap \mathcal{Z}(\sigma(V_{r-1}))\big) \\
&= \operatorname{card}\big(\gamma^{-1}W \cap \gamma^{-1}\big(\mathcal{Z}(\rho(U_1))\big) \cap \dots \cap \gamma^{-1}\big(\mathcal{Z}(\rho(U_{r-1}))\big)\big) \\
&= \kappa \operatorname{card}\big(W \cap \mathcal{Z}(\rho(U_1)) \cap \dots \cap \mathcal{Z}(\rho(U_{r-1}))\big) = \kappa d^o_{u^r} f.
\end{aligned}$$

D'où $\nu = \kappa$, et par suite $h(\mu^*(g)) = \kappa h(f)$ comme annoncé.

Désignons maintenant par $W_1, \dots, W_s$ les composantes irréductibles de $\gamma^{-1}W$ de dimension $r-1$, par $\mathfrak{P}_i = \mathcal{I}(W_i) \subset \bar{k}[X_0, \dots, X_N]$ l'idéal de W_i, et posons $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \cap K[X_0, \dots, X_N]$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. On a donc $\mathfrak{p}_i.\bar{k} = \mathfrak{P}_i$ (car W_i est définie sur K). D'autre part, on peut écrire $g = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} g_i$, où g_i est une forme résultante d'indice d de $\mathfrak{p}_i$. Appliquant alors le lemme 3.5 aux idéaux $\mathfrak{p}_i$ et aux formes g_i, et en ajoutant toutes les inégalités obtenues membre à membre, on obtient, pour toute place v de K (avec les notations du lemme):

$$r\Delta^{r-1}\, d(\gamma^{-1}W) \log_q A_v \leqslant \log_q \frac{M_v(\mu^*(g))}{M_v(g)} \leqslant r\Delta^{r-1}\, d(\gamma^{-1}W) \log_q B_v.$$

On utilise ensuite le lemme 3.4 pour estimer A_v et B_v, on multiplie par le degré résiduel d_v, on somme sur toutes les places de K et on divise par $[K:k]$, ce qui donne:

$$-c' r\Delta^{r-1}\, d(\gamma^{-1}W) \leqslant h(\mu^*(g)) - h(g) \leqslant c'' r\Delta^{r-1}\, d(\gamma^{-1}W),$$

avec

$$c' = \frac{1}{[K:k]} \sum_{v|\infty} d_v \log_q |\Delta_1 \Delta_2|_v \quad \text{et} \quad c'' = \frac{1}{[K:k]} \sum_{v|\infty} d_v \log_q |\Delta_2|_v.$$

On a donc finalement, compte tenu des relations $c' \geqslant c''$, $r \leqslant n+1$, $h(\mu^*(g)) = \kappa h(W)$, $h(g) = \Delta^r h(\gamma^{-1} W)$ (proposition 3.2), et $d(\gamma^{-1} W) = \frac{\kappa}{\Delta^{r-1}} d(W)$ (lemme 3.6):

$$|\kappa h(W) - \Delta^r h(\gamma^{-1} W)| \leqslant (n+1) c' \kappa d(W).$$

C'est l'encadrement voulu avec $c = (n+1)c'$. □

4. Hauteurs, multiplicités et intersection

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer des formules pour la hauteur et la multiplicité d'un cycle intersection d'une variété projective avec une hypersurface, analogues à celles de la proposition 4 de [Ph5]. Du fait de la caractéristique positive nous obtiendrons un résultat moins fort pour les multiplicités.

Rappelons brièvement les définitions de [Ph5]. Si $m \in \{0, \ldots, N\}$, on appelle, conformément à l'usage, m-cycle positif de $\mathbb{P}_N$ une somme formelle finie $S = \sum n_i [W_i]$, avec $n_i \in \mathbb{N}$ et $W_i \subset \mathbb{P}_N$ variété projective irréductible de dimension m. Comme nous ne considérerons que des cycles positifs, on dira plus simplement dans la suite m-cycle au lieu de m-cycle positif. Si $W \subset \mathbb{P}_N$ est une variété projective, on notera $d(W)$ son degré dans $\mathbb{P}_N$, et on étend la définition aux cycles par linéarité. Si $S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i [W_i]$ est un m-cycle, et si $d = (d_1, \ldots, d_r)$ est un r-uplet de $(\mathbb{N}^*)^r$, où $r = m+1$, on appellera forme résultante d'indice d de S toute forme f de la forme $f = f_1^{n_1} \cdots f_s^{n_s}$, où f_i est une forme résultante d'indice d de W_i. Si de plus W_i est définie sur $\bar{k}$ pour tout i, on définit la hauteur de S, notée $h(S)$, en posant $h(S) = h(f)$, où f est une forme résultante d'indice $d_0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^{m+1}$ de S. Enfin, si $W \subset \mathbb{P}_N$ est une variété projective irréductible de dimension $r-1$ et d'idéal $\mathfrak{p} \subset C[X_0, \ldots, X_N]$, et si $p \in C[X_0, \ldots, X_N]$ est un polynôme homogène tel que $p \notin \mathfrak{p}$, on définit un cycle intersection $W.Z_p$ de manière usuelle comme suit (*cf.* par ex. [Fu]). Notons $R = C[X_0, \ldots, X_N]$, $I = (\mathfrak{p}, p) \subset R$, et $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les premiers associés minimaux de R/I. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, s\}$, soit $n_i = \ell_{R_{\mathfrak{p}_i}}\big((R/I)_{\mathfrak{p}_i}\big)$ la longueur du $R_{\mathfrak{p}_i}$-module $(R/I)_{\mathfrak{p}_i}$. Alors on pose $W.Z_p = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i [W_i]$, où W_i est la variété des zéros de $\mathfrak{p}_i$.

Ceci étant, on a:

THÉORÈME 4.1. *Soient $W \subset \mathbb{P}_N$ une variété projective irréductible, définie sur $\bar{k}$, d'idéal $\mathfrak{p} \subset \bar{k}[X_0, \ldots, X_N]$, et $p \in \bar{k}[X_0, \ldots, X_N]$ un polynôme homogène de degré $\delta \geqslant 1$ tel que $p \notin \mathfrak{p}$. Alors:*

(i) $d(W.Z_p) = \delta d(W)$.
(ii) $h(W.Z_p) \leqslant \delta h(W) + d(W) h(p)$.

Démonstration. L'assertion (i) n'est rien d'autre qu'une reformulation du classique théorème de Bézout (voir [Ha], Chap. I, Theorem 7.7). Montrons (ii). Avec les notations du § 2, soient $r = \dim W + 1$, $d = (\delta, 1 \dots, 1) \in \mathbb{N}^r$, $d' = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^{r-1}$, $\rho : \bar{k}\,[u^1, \dots, u^r] \to \bar{k}[u^2, \dots, u^r]$ le morphisme de spécialisation défini par $\rho(U_1) = p$, et f une forme résultante d'indice d de W. D'après la proposition 2.3, $\rho(f)$ est une forme résultante du cycle $W.Z_p$ d'indice d'. D'autre part, la proposition 3.2 donne $h(f) = \delta h(W)$. L'inégalité à démontrer s'écrit donc $h(\rho(f)) \leqslant h(f) + d(W)h(p)$. Or, si $K \subset \bar{k}$ est une extension finie de k contenant tous les coefficients de f et p, f est un polynôme en les variables $u^2, \dots, u^r$, dont les coefficients sont des polynômes homogènes $a_\alpha \in K[u^1]$ de degré $d(W)$. Par spécialisation des variables u^1 en les coefficients de p, on obtient alors aisément, pour toute place v de K, $M_v(\rho(f)) \leqslant M_v(f).M_v(p)^{d(W)}$. D'où le résultat. □

Pour énoncer le théorème suivant il nous faut définir tout d'abord les différentes notions de multiplicité dont nous aurons besoin. Nous suivons [Ph2] et [Ph5] pour les définitions, mais certains des résultats de ces articles ne s'appliquant plus ici (à cause de la caractéristique positive), nous devrons procéder autrement pour obtenir le théorème 4.2.

Soit $W \subset \mathbb{P}_N$ une variété projective irréductible d'idéal homogène (premier) $\mathfrak{p} \subset C[X_0, \dots, X_N]$, $x = (x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{P}_N$ un point de W, et $p \in C[X_0, \dots, X_N]$ un polynôme. On note $\mathfrak{M}_x$ l'idéal premier de $C[X_0, \dots, X_N]/\mathfrak{p}$ correspondant au point $x \in W$, et $\bar{p}$ l'image de p par la surjection canonique $C[X_0, \dots, X_N] \to C[X_0, \dots, X_N]/\mathfrak{p}$. On définit alors l'*ordre de p en x le long de W* par $\mathrm{ord}_{x,W} p := \sup\{\ell \in \mathbb{N} \mid \bar{p} \in \mathfrak{M}_x^\ell\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On définit encore l'ordre de p en x par $\mathrm{ord}_x p = \mathrm{ord}_{x,\mathbb{P}_N} p$. Il est clair que la fonction ord_x définit une valuation (discrète) sur l'anneau $C[X_0, \dots, X_N]$. D'autre part on a : $\mathrm{ord}_{x,W}\, p = +\infty \Leftrightarrow p \in \mathfrak{p}$ (ceci résulte immédiatement de la relation $\bigcap_{\ell \geqslant 0} \mathfrak{M}_x^\ell = (0)$).

Passons à la multiplicité d'un cycle en un point ([Ph2]). Soit tout d'abord $W \subset \mathbb{P}_N$ une variété projective irréductible de dimension $r - 1$. On pose $d_0 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^r$, et on reprend les notations correspondantes u_i^j $(0 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$ et U_j (§ 2). On introduit encore de nouvelles indéterminées s_{ik}^j, $1 \leqslant j \leqslant r$, $0 \leqslant i < k \leqslant N$, et on pose $s_{ik}^j = -s_{ki}^j$ si $i > k$ et $s_{ii}^j = 0$. Si $R = C[X_0, \dots, X_N]$, on définit alors un morphisme de R-algèbres $\mathfrak{d} : R[u] \to R[s]$ par $\mathfrak{d}(u_i^j) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant N} s_{ik}^j X_k$. Si x est un point de $\mathbb{P}_N$ et g un polynôme de $R[s]$, on définit $\mathrm{ord}_x g$ par $\mathrm{ord}_x g = \min_{1 \leqslant i \leqslant t} \mathrm{ord}_x g_i$, où $g_1, \dots, g_t \in R$ sont les coefficients de g. Ceci définit une valuation discrète sur l'anneau $R[s]$. Avec ces notations, on définit la multiplicité de W en x par $m_x(W) = \mathrm{ord}_x \mathfrak{d} f$, où f est une forme résultante d'indice d_0 de W. Si maintenant $S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i [W_i]$ est un m-cycle de $\mathbb{P}_N$, on définit la multiplicité de S en x par $m_x(S) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i m_x(W_i)$. On voit aisément que $m_x(S) = \mathrm{ord}_x \mathfrak{d} f$, où f est une forme résultante d'indice d_0 de S.

On peut maintenant énoncer le résultat que nous obtenons concernant les multiplicités:

THÉORÈME 4.2. *Soient* $W \subset \mathbb{P}_N$ *une variété projective irréductible d'idéal* $\mathfrak{p} \subset C[X_0, \ldots, X_N]$, *et* $p \in C[X_0, \ldots, X_N]$ *un polynôme homogène de degré* $\delta \geqslant 1$ *tel que* $p \notin \mathfrak{p}$. *Alors, pour tout point* $x \in W$, *on a :* $m_x(W.Z_p) \geqslant \mathrm{ord}_{x,W} p$.

La démonstration nécessite plusieurs lemmes.

LEMME 4.3. *Soit* $W \subset \mathbb{P}_N$ *une variété projective irréductible. Alors:*

(i) *Pour tout* $x \in \mathbb{P}_N$, *on a :* $m_x(W) = 0 \Leftrightarrow x \notin W$.
(ii) *Il existe un ouvert non vide* U *de* W *tel que* $\forall\, x \in U,\ m_x(W) = 1$.

Démonstration. (i) Soient f une forme résultante d'indice $d_0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^r$ de W, et $f_1, \ldots, f_t$ les coefficients de $\mathfrak{d}f \in R[s]$. On sait d'après [Ne], Lemma 11, que l'idéal homogène $J = (f_1, \ldots, f_t)$ est inclus dans l'idéal $\mathfrak{p}$ de définition de W, et que $\sqrt{J} = \mathfrak{p}$. Il est alors clair que si $x \in W$ on a $\mathrm{ord}_x f_i \geqslant 1$ pour tout i, d'où $m_x(W) \geqslant 1$. Réciproquement, si $m_x(W) \geqslant 1$, alors $f_i \in \mathfrak{M}_x$ pour tout i, où $\mathfrak{M}_x \subset R$ est l'idéal correspondant au point $x \in \mathbb{P}_N$. Donc $J \subset \mathfrak{M}_x$, d'où $\sqrt{J} = \mathfrak{p} \subset \mathfrak{M}_x$ et $x \in W$. Ceci prouve (i).

(ii) Toujours d'après [Ne], Lemma 11, on sait que $\mathfrak{p}$ est l'unique composante primaire isolée de l'idéal $J = (f_1, \ldots, f_t)$. Donc J a une décomposition primaire minimale de la forme $J = \mathfrak{p} \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$, avec $\sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i$ et $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Notons, pour $i \in \{1, \ldots, s\}$, $W_i = \mathcal{Z}(Q_i)$ le lieu des zéros de Q_i, et posons $O = W \setminus \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s} W_i$, qui est donc un ouvert non vide de W. Soit maintenant $x \in O$ tel que $m_x(W) \geqslant 2$. Alors $f_1(x) = \cdots = f_t(x) = 0$ et $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant t$, $0 \leqslant j \leqslant N$. Montrons que pour tout élément homogène $g \in \mathfrak{p}$ et tout $j \in \{0, \ldots, N\}$, on a $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 0$. Soit donc $g \in \mathfrak{p}$. Soit $h \in Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$, homogène, tel que $h \notin \mathfrak{M}_x$ (un tel élément h existe car $x \in O$). Alors $gh \in J$, et donc $\frac{\partial(gh)}{\partial x_j}(x) = 0$ pour tout $j \in \{0, \ldots, N\}$. D'où $h(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 0$, puis $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 0$ car $h(x) \neq 0$. Ainsi, on a montré que tout point $x \in O$ tel que $m_x(W) \geqslant 2$ est un point singulier de la variété W. L'ensemble des points singuliers d'une variété projective étant un fermé propre de la variété, on a bien (ii). $\square$

On déduit immédiatement du lemme le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4.4. *Soit* $S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i[W_i]$ *un* m*-cycle de* $\mathbb{P}_N$, *où* $0 \leqslant m \leqslant N$. *Alors, si* $i \in \{1, \ldots, s\}$, *on a* $m_x(S) = n_i$ *pour tout* x *appartenant à un ouvert non vide de* W_i.

Nous aurons encore besoin du lemme un peu technique suivant.

LEMME 4.5. *Soient* x *un point de* $\mathbb{P}_N(C)$, $L = \overline{C(s^2, \ldots, s^r, X_0, \ldots, X_N)}$ *une clôture algébrique du corps* $C(s^2, \ldots, s^r, X_0, \ldots, X_N)$, *et* $\mathrm{ord}_x : L \to \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ *un prolongement quelconque de la valuation* $\mathrm{ord}_x : C(s^2, \ldots, s^r, X_0, \ldots, X_N) \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. *Soient*

q un polynôme homogène non nul de $C[X_0, \ldots, X_N]$ et $z = (z_0, \ldots, z_N)$ un point de $L^{N+1} \setminus \{0\}$. Alors

$$\mathrm{Lord}_x q(z) \geqslant \mathrm{ord}_x q. \min_{0 \leqslant j<k \leqslant N} \mathrm{ord}_x(z_j x_k - z_k x_j) + (d^o q - \mathrm{ord}_x q) \min_{0 \leqslant i \leqslant N} \mathrm{ord}_x z_i.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord $\min_{0 \leqslant i \leqslant N} \mathrm{ord}_x z_i = 0$. Soit $i \in \{0, \ldots, N\}$ un indice tel que $x_i \neq 0$. Le polynôme q s'écrit sous la forme

$$q = \sum_{\ell \leqslant |\alpha| \leqslant \delta} c_\alpha X_i^{\delta-|\alpha|} \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant N \\ j \neq i}} (x_i X_j - x_j X_i)^{\alpha_j},$$

où $\delta = d^o q$, $\ell = \mathrm{ord}_x q$, $\alpha = (\alpha_j)_{\substack{0 \leqslant j \leqslant N \\ j\neq i}} \in \mathbb{N}^N$, et $c_\alpha \in C$. Comme $\mathrm{ord}_x z_j \geqslant 0$ et $\mathrm{ord}_x(x_i z_j - x_j z_i) \geqslant 0$ pour tout j, on en déduit facilement que $\mathrm{ord}_x q(z) \geqslant \ell \min_{j \neq i} \mathrm{ord}_x(x_i z_j - x_j z_i)$, d'où le résultat.

Si maintenant z est quelconque, soit k un indice tel que $\mathrm{ord}_x z_k = \min_{0 \leqslant i \leqslant N} \mathrm{ord}_x z_i$. En appliquant le résultat précédent à z/z_k et en remarquant que $z_k^\delta q(z/z_k) = q(z)$, on obtient le lemme. □

Démonstration du théorème 4.2. Posons $r = \dim W + 1$, $d_0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^r$, $d = (\delta, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^r$, et soit $f \in C[u^1, \ldots, u^r]$ (resp. $f_\delta \in C[v^1, u^2, \ldots, u^r]$) une forme résultante d'indice d_0 (resp. d) de $\mathfrak{p}$. On note comme précédemment $U_1, \ldots, U_r, V_1$ les polynômes génériques correspondant aux variables $u^1, \ldots, u^r, v^1$, et l'on introduit comme ci-dessus les indéterminées s_{ik}^j, $1 \leqslant j \leqslant r$, $0 \leqslant i, k \leqslant N$. Notons encore L le corps algébriquement clos $L = \overline{C(s^2, \ldots, s^r, X)}$ (où X désigne la collection des indéterminées $X_0, \ldots, X_N$), et désignons par $\mathfrak{d}_2 : C[u^2, \ldots, u^r] \to L$ le morphisme de C-algèbres défini par $\mathfrak{d}_2(u_i^j) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant N} s_{ik}^j X_k$ (prolongé en $\mathfrak{d}_2 : C[u, v^1] \to L[u^1, v^1]$), et par $\mathfrak{d}_1 : L[u^1] \to L[s^1]$ le morphisme de L-algèbres défini par $\mathfrak{d}_1(u_i^1) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant N} s_{ik}^1 X_k$. Posons $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 \circ \mathfrak{d}_2$, et soit $\rho : C[v^1] \to C$ le morphisme de C-algèbres défini par $\rho(V_1) = p$ (que l'on prolonge en un morphisme de L-algèbres $\rho : L[v^1, u^1, s^1] \to L[u^1, s^1]$). Avec ces notations, ρf_δ est une forme résultante d'indice $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^{r-1}$ du cycle $W.Z_p$, donc $m_x(W.Z_p) = \mathrm{ord}_x(\mathfrak{d}_2 \rho f_\delta) = \mathrm{ord}_x(\rho \mathfrak{d}_2 f_\delta)$.

Remarquons maintenant que $\mathfrak{d}_2 f \neq 0$: en effet, $\mathfrak{d}_2 f = 0$ impliquerait $\mathfrak{d} f = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 f = 0$, d'où $m_y(W) = +\infty$ pour tout $y \in W$, ce qui est exclu d'après le lemme 4.3. On a de la même façon $\mathfrak{d}_2 f_\delta \neq 0$. Par la proposition 2.4, si l'on désigne par $V = \mathcal{Z}\left(\mathfrak{d}_2(\mathfrak{p})\right) \subset \mathbb{P}_N(L)$ et par $H_j = \mathcal{Z}\left(\mathfrak{d}_2(U_j)\right)$ $(2 \leqslant j \leqslant r)$, il existe des points $z_1, \ldots, z_t$ de $L^{N+1} \setminus \{0\}$, éventuellement égaux, et de même des points $z'_1, \ldots, z'_s$ de $L^{N+1} \setminus \{0\}$ tels que $\mathfrak{d}_2 f = \prod_{1 \leqslant i \leqslant t} U_1(z_i)$, $\mathfrak{d}_2 f_\delta = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} V_1(z'_i)$, et $V \cap H_2 \cap \cdots \cap H_r = \{z_1, \ldots, z_t\} = \{z'_1, \ldots, z'_s\}$. Notons que puisque $d^o_{v^1}(\mathfrak{d}_2 f_\delta) = d^o_{v^1} f_\delta = d^o_{u^1} f = d^o_{u^1}(\mathfrak{d}_2 f)$, on a en fait $s = t$. Considérons alors le morphisme de L-algèbres $\omega : L[v^1, u^2, \ldots, u^r] \to L[u^1, \ldots, u^r]$ caractérisé par $\omega(V_1) = U_1^\delta$ et $\omega(u_i^j) = u_i^j$ si $2 \leqslant j \leqslant r$. On sait que l'on a $\omega(f_\delta) = \lambda f^\delta$, avec $\lambda \in C, \lambda \neq 0$ (voir [Re], prop. III.2.3 ou [Ph1], preuve de la prop. 2.8 page 36), mais quitte à prendre f_δ/λ au lieu de f_δ, on peut supposer $\lambda = 1$. On a alors $(\mathfrak{d}_2 f)^\delta = \mathfrak{d}_2 \omega(f_\delta) = \omega(\mathfrak{d}_2 f_\delta)$, ce qui donne $\prod_{1 \leqslant i \leqslant t} U_1(z_i)^\delta = \prod_{1 \leqslant i \leqslant t} U_1(z'_i)^\delta$. Ces deux décompositions en produit de facteurs irréductibles dans $L[u^1]$ impliquent, quitte à renuméroter, que z_i et z_i' sont proportionnels pour tout i. Par homogénéité de U_1 et V_1, on peut alors supposer $z_i' = z_i$, $1 \leqslant i \leqslant t$.

Choisissons maintenant un prolongement quelconque à L de la valuation $\mathrm{ord}_x : C(s^2, \dots, s^r, X) \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, prolongement qu'on notera encore ord_x. On prolonge cette valuation en $\mathrm{ord}_x : L[u^1, s^1] \to \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ en posant, si $g \in L[u^1, s^1]$, $\mathrm{ord}_x g = \min_\alpha \mathrm{ord}_x g_\alpha$, où $(g_\alpha)_\alpha$ sont les coefficients de $g \in L[u^1, s^1]$. On définit encore, si $z_i = (z_{i0}, \dots, z_{iN}) \in L^{N+1}$, $\mathrm{ord}_x z_i = \min_{0 \leqslant j \leqslant N} \mathrm{ord}_x z_{ij}$. Appliquons l'homomorphisme ρ. Il vient : $\rho(\mathfrak{d}_2 f_\delta) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant t} p(z_i)$. Mais par définition de $\mathrm{ord}_{x,W}\, p$, on peut écrire $p = q + r$, avec $r \in \mathfrak{p}$ et $q \in C[X_0, \dots, X_N]$ homogène tel que $\mathrm{ord}_x q = \mathrm{ord}_{x,W}\, p$. On a donc $p(z_i) = q(z_i)$ pour tout i puisque $z_i \in \mathcal{Z}(\mathfrak{d}_2(\mathfrak{p}))$, et grâce au lemme 4.5 on obtient finalement:

$$\begin{aligned} m_x(W.Z_p) = \mathrm{ord}_x(\rho \mathfrak{d}_2 f_\delta) &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} \mathrm{ord}_x(q(z_i)) \\ &\geqslant \mathrm{ord}_x q \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} \min_{0 \leqslant j<k \leqslant N} \mathrm{ord}_x(z_{ij} x_k - z_{ik} x_j) \\ &\quad + (d^o q - \mathrm{ord}_x q) \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} \mathrm{ord}_x z_i. \end{aligned}$$

Si l'on définit maintenant, comme dans [Ph1], le morphisme de L-algèbres $\mathfrak{d}_{1,x}$: $L[u^1] \to L[s^1]$ par $\mathfrak{d}_{1,x}(u_i^1) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant N} s_{ik}^1 x_k$, on a, pour tout i:

$$\mathfrak{d}_{1,x}\big(U_1(z_i)\big) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant N} \mathfrak{d}_{1,x}(u_j^1) z_{ij} = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant N \\ 0 \leqslant k \leqslant N}} s_{jk}^1 z_{ij} x_k = \sum_{0 \leqslant j<k \leqslant N} (z_{ij} x_k - z_{ik} x_j) s_{jk}^1.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_x(\mathfrak{d}_{1,x} \circ \mathfrak{d}_2 f) &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} \mathrm{ord}_x\big(\mathfrak{d}_{1,x}(U_1(z_i))\big) \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} \min_{0 \leqslant j<k \leqslant N} \mathrm{ord}_x(z_{ij} x_k - z_{ik} x_j) \end{aligned}$$

et comme par ailleurs

$$\mathrm{ord}_x(\mathfrak{d}_2 f) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} \mathrm{ord}_x U_1(z_i) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} \mathrm{ord}_x z_i \geqslant 0$$

(car $\mathfrak{d}_2 f$, vu comme polynôme en u^1, est en fait à coefficients dans $C[s^2, \dots, s^r, X]$), on obtient:

$$m_x(W.Z_p) \geqslant \mathrm{ord}_x q . \mathrm{ord}_x(\mathfrak{d}_{1,x} \circ \mathfrak{d}_2 f).$$

Il reste encore à voir que $\mathrm{ord}_x(\mathfrak{d}_{1,x} \circ \mathfrak{d}_2 f) \geqslant 1$. Introduisons pour cela de nouvelles indéterminées $X_0', \dots, X_N'$. Par définition de $\mathfrak{d}_1 \circ \mathfrak{d}_2 f$ et $\mathfrak{d}_{1,x} \circ \mathfrak{d}_2 f$, il existe un polynôme $\Delta(X, X', s) = \sum_\alpha c_\alpha(X, X') s^\alpha \in C[X, X', s]$ (où les c_α sont des polynômes de $C[X, X']$) tel que $\mathfrak{d} f = \mathfrak{d}_1 \circ \mathfrak{d}_2 f = \Delta(X, X, s)$ et $\mathfrak{d}_{1,x} \circ \mathfrak{d}_2 f = \Delta(X, x, s)$. Avec ces notations on a $\mathrm{ord}_x(\mathfrak{d} f) = \min_\alpha \mathrm{ord}_x c_\alpha(X, X)$ et $\mathrm{ord}_x(\mathfrak{d}_{1,x} \circ \mathfrak{d}_2 f) = \min_\alpha \mathrm{ord}_x c_\alpha(X, x)$. Or, $\mathrm{ord}_x \mathfrak{d} f \geqslant 1$ par le lemme 4.3, donc $c_\alpha(x, x) = 0$ pour tout α, et par suite ord_x $c_\alpha(X, x) \geqslant 1$ pour tout α. On en déduit $\mathrm{ord}_x(\mathfrak{d}_{1,x} \circ \mathfrak{d}_2 f) \geqslant 1$ comme annoncé. $\square$

Remarque: la preuve précédente montre en fait l'inégalité plus précise $m_x(W.Z_p) \geqslant \mathrm{ord}_{x,W}p.\mathrm{ord}_x(\mathfrak{d}_{1,x} \circ \mathfrak{d}_2 f)$. Comme l'a remarqué le rapporteur, afin d'améliorer le théorème 4.2 et d'obtenir un analogue parfait de la proposition 4 de [Ph5], il faudrait disposer d'un analogue en caractéristique positive de la proposition 1 de [Ph2] et de son corollaire, qui impliqueraient $\mathrm{ord}_x(\mathfrak{d}_{1,x} \circ \mathfrak{d}_2 f) \geqslant \mathrm{ord}_x(\mathfrak{d} f) = m_x(W)$.

5. Les deux compactifications de $\mathbb{G}_a^n$

Dans ce qui suit on note $\tau : C \to C$ le Frobenius $x \mapsto x^q$ et $C\{\tau\}$ l'anneau des endomorphismes $\mathbb{F}_q$-linéaires de $\mathbb{G}_a$. Rappelons qu'on appelle alors module de Drinfeld un couple $(\mathbb{G}_a, \psi)$, où $\psi : A \to C\{\tau\}$ est un homomorphisme injectif d'anneaux tel que, pour tout $a \in A$, $\psi(a)$ s'écrive sous la forme $\psi(a) = a_0\tau^0 + \cdots + a_m\tau^m$, avec $a_0 = a$. L'entier m s'écrit alors $m = d \deg a$, où $d \geqslant 0$ est le rang du module de Drinfeld. Si $(\mathbb{G}_a, \psi)$ est un A-module de Drinfeld de rang $d \geqslant 0$ défini par $\psi(T) = T\tau^0 + a_1\tau^1 + \cdots + a_d\tau^d$, $a_d \neq 0$, on dira que $(\mathbb{G}_a, \psi)$ est défini sur le corps $K \subset C$ si tous les a_i sont dans K.

Dans toute la suite on se fixe une fois pour toutes n A-modules de Drinfeld $(\mathbb{G}_a, \Phi_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, de rangs respectifs $d_1, \ldots, d_n$, et l'on note $E = (\mathbb{G}_a^n, \Phi)$ le T-module produit. On supposera que les modules de Drinfeld $(\mathbb{G}_a, \Phi_i)$ sont tous de rang $d_i \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et qu'en outre ils sont tous définis sur $\bar{k}$. On note alors $d = \mathrm{ppcm}(d_1, \ldots, d_n)$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $D_i = d/d_i$. Pour $a \in A$, on définit alors l'application $[a] : \mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a^n$ par

$$[a](x_1, \ldots, x_n) = (\Phi_1(a^{D_1})(x_1), \ldots, \Phi_n(a^{D_n})(x_n)).$$

Notons que $[a]$ est un endomorphisme $\mathbb{F}_q$-linéaire de $\mathbb{G}_a^n$ tel que $[ab] = [a] \circ [b] = [b] \circ [a]$ pour tout $(a, b) \in A^2$; d'autre part, dans le cas où $d_1 = \cdots = d_n$, on a $d = d_i$ et $D_i = 1$ pour tout i, et l'application $[a]$ est l'action naturelle du T-module produit E.

Afin de pouvoir définir la hauteur normalisée d'une sous-variété de E, nous avons besoin de fixer une compactification de $\mathbb{G}_a^n$ possédant de bonnes propriétés. Nous considérerons $\varphi_1 : \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ et $\varphi_2 : \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow (\mathbb{P}_1)^n \xhookrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_{2^n-1}$ les deux plongements naturels de $\mathbb{G}_a^n$, définis respectivement par $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = (1, x_1, \ldots, x_n)$ et $\varphi_2 = s \circ j$, où $s : (\mathbb{P}_1)^n \hookrightarrow \mathbb{P}_{2^n-1}$ est le plongement de Segre et $j(x_1, \ldots, x_n) = (1, x_1, \ldots, 1, x_n)$.

Les propriétés de ces plongements qui nous seront utiles sont résumées dans les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 5.1. *Soit $\varphi : \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ l'un des deux plongements φ_1 ou φ_2. Notons $G = \varphi(\mathbb{G}_a^n)$ et $\bar{G}$ l'adhérence de Zariski de G dans $\mathbb{P}_N$. Alors:*

(i) *Soit D le diviseur de $\bar{G}$ correspondant à l'inclusion $\bar{G} \subset \mathbb{P}_N$. Pour tout $a \in A$ non nul, le morphisme $[a] : \mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a^n$ se prolonge en un morphisme surjectif*

$[a] : \bar{G} \to \bar{G}$ fini et plat, tel que $[a]^*(D) \sim \delta D$ (où $\delta = q^{d \deg a}$), vérifiant $[a](G) = G$ et $[a](\bar{G} \setminus G) = \bar{G} \setminus G$, et donné par une famille de polynômes $F_0^{(a)}, \ldots, F_N^{(a)}$, à coefficients dans $\bar{k}$ et homogènes de même degré δ.

(ii) *Pour tout $\xi \in \mathbb{G}_a^n(\bar{k})$, la translation $t_\xi : \mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a^n$, $x \mapsto x + \xi$ se prolonge en un isomorphisme $t_\xi : \bar{G} \to \bar{G}$ donné par des polynômes à coefficients dans $\bar{k}$ homogènes de degré un.*

Démonstration. La vérification est facile. Pour le plongement $\varphi_1 : \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ on a $\bar{G} = \mathbb{P}_n$, et $[a]$ se prolonge en $[a] : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ par

$$[a](x_0, \ldots, x_n) = \left(x_0^\delta, x_0^\delta \Phi_1(a^{D_1})(x_1/x_0), \ldots, x_0^\delta \Phi_n(a^{D_n})(x_n/x_0)\right).$$

Les propriétés (i) en découlent alors facilement (la platitude résulte par exemple de [Ha], exercice 10.9), et la propriété (ii) est claire.

Pour le plongement φ_2, on commence par définir le morphisme suivant, dans $(\mathbb{P}_1)^n$:

$$\begin{aligned} [a] : (\mathbb{P}_1)^n &\longrightarrow (\mathbb{P}_1)^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (x_{10}^\delta, x_{10}^\delta \Phi_1(a^{D_1})(x_{11}/x_{10}), \ldots, x_{n0}^\delta, x_{n0}^\delta \Phi_n(a^{D_n})(x_{n1}/x_{n0})) \end{aligned}$$

où $x_i = (x_{i0}, x_{i1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Posant alors G_0 l'image de $\mathbb{G}_a^n$ dans $(\mathbb{P}_1)^n$, on a $\overline{G_0} = (\mathbb{P}_1)^n$, et ce morphisme vérifie les propriétés voulues avec G_0 et $\overline{G_0}$ au lieu de G et $\bar{G}$. Via le plongement de Segre (qui est une immersion fermée), on obtient alors un morphisme $[a] : \bar{G} \to \bar{G}$ ayant les conditions (i) requises. Pour (ii) on procède de même en constatant tout d'abord que $t_\xi : (\mathbb{P}_1)^n \to (\mathbb{P}_1)^n$ défini par

$$t_\xi(x_{10}, x_{11}, \ldots, x_{n0}, x_{n1}) = (x_{10}, x_{11} + \xi_1 x_{10}, \ldots, x_{n0}, x_{n1} + \xi_n x_{n0})$$

vérifie les conditions dans $(\mathbb{P}_1)^n$. Par plongement de Segre on obtient alors la propriété voulue. □

Dans toute la suite, si $\varphi : \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ est l'un des deux plongements φ_1 ou φ_2, on note $G = \varphi(\mathbb{G}_a^n)$, $\bar{G}$ son adhérence, et si $V \subset \mathbb{G}_a^n$ est une variété affine, on identifie V à $\varphi(V) \subset \mathbb{P}_N$. Enfin, si a est un élément non nul de A, $[a]$ désigne, sauf mention expresse du contraire, le morphisme prolongé $[a] : \bar{G} \to \bar{G}$.

PROPOSITION 5.2. *Soient $\varphi : \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ l'un des deux plongements φ_1 ou φ_2, et $V \subset \mathbb{G}_a^n$ une variété affine. Alors, pour tout élément non nul $a \in A$, on a $[a]^{-1}(\bar{V}) = \overline{[a]^{-1}(V)}$.*

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où V est irréductible. Dans ce cas, décomposons $[a]^{-1}(\bar{V})$ en composantes irréductibles: $[a]^{-1}(\bar{V}) = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s} W_i$. Alors $[a]([a]^{-1}(\bar{V})) = \bar{V} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s} [a](W_i)$. Comme $\bar{V}$ est irréductible et que $\dim W_i = \dim [a](W_i) = \dim V$ pour tout i (puisque $[a]$ est plat de dimension relative 0, [Ha], Corollary II.9.6), on en déduit que $[a](W_i) = \bar{V}$ pour tout i. Il en résulte en particulier, vu les propriétés (i) de la proposition 5.1, que $W_i \cap G \neq \emptyset$ et donc $\overline{(W_i \cap G)} = W_i$. On obtient finalement:

$$\overline{[a]^{-1}(V)} = \overline{[a]^{-1}(\bar{V}) \cap G} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s} \overline{(W_i \cap G)} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s} W_i = [a]^{-1}(\bar{V}). \qquad \square$$

6. Hauteurs des variétés projectives relatives à un bon plongement

À partir de maintenant on suppose que l'on a choisi une fois pour toutes l'un des deux plongements φ_1 ou φ_2, que l'on notera souvent plus simplement φ. Un tel choix étant fait, on introduit alors la définition suivante:

DÉFINITION 6.1. On appellera "bon plongement" de degré $\Delta \geqslant 1$ toute immersion fermée $\psi: \bar{G} \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Si D et D' sont les diviseurs correspondant aux plongements de $\bar{G}$ dans $\mathbb{P}_N$ et $\mathbb{P}_M$ respectivement, alors $D' \sim \Delta D$.
(ii) Le morphisme ψ est donné par des polynômes $F_0, \ldots, F_M$ de $\bar{k}[X_0, \ldots, X_N]$, homogènes de même degré Δ, et ne s'annulant pas identiquement sur $\bar{G}$.

Les lemmes qui suivent sont analogues à ceux de [Ph3] et nous permettront de définir les hauteurs normalisées relativement à un bon plongement. Toutes les "constantes" qui apparaissent dépendent toujours, sans que ce soit explicitement écrit, de n, des modules de Drinfeld, et des plongements φ et ψ fixés. Rappelons que l'on identifie toute variété affine $V \subset \mathbb{G}_a^n$ à son image dans $\mathbb{P}_N$. On note alors $d(V)$ le degré de $\bar{V} \subset \mathbb{P}_N$, et si ψ est un bon plongement, on note $d_\psi(V)$ le degré de $\overline{\psi(V)}$. On utilise des notations analogues pour h (*cf.* définition 3.1).

LEMME 6.2. *Soit* ψ: $\bar{G} \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ *un bon plongement. Soit* a *un élément non nul de* A, *et posons* $\delta = q^{d \deg a}$. *Alors il existe un réel* $c_1(a) > 0$ *tel que, pour tout entier* $\ell \in \mathbb{N}$ *et toute sous-variété fermée* $V \subset \mathbb{G}_a^n$ *définie sur* $\bar{k}$, *de dimension* $r-1$, *on ait:*

(i) $d_\psi([a^\ell]^{-1} V) = \delta^{\ell(n-r+1)} d_\psi(V)$
(ii) $|h_\psi(V) - \delta^{\ell(r-n)} h_\psi([a^\ell]^{-1} V)| \leqslant c_1(a) \delta^\ell d_\psi(V)$.

Démonstration. Remarquons déjà que (i) est une conséquence immédiate du lemme 3.6. En effet, en prenant pour γ le morphisme ψ: $\bar{G} \to \psi(\bar{G})$, ce lemme donne $d_\psi(V) = \Delta^{r-1} d(V)$ pour tout V, où Δ désigne le degré du bon plongement ψ. Mais avec $\gamma = [a^\ell]$, $U = G$ et $W = \bar{V}$ (et la proposition 5.2), il donne aussi $d([a^\ell]^{-1} V) = \delta^{\ell(n-r+1)} d(V)$, d'où le résultat.

Pour montrer (ii), on applique la proposition 3.3 aux morphismes ψ et $[a]$ comme ci-dessus, ce qui donne, pour toute sous-variété $V \subset \mathbb{G}_a^n$: $|h_\psi(V) - \Delta^r h(V)| \leqslant c\, d_\psi(V)$ et $|h(V) - \delta^{r-n} h([a]^{-1} V)| \leqslant c_a d(V)$, où $c_a > 0$. L'inégalité triangulaire conduit alors à:

$$|h_\psi(V) - \delta^{r-n} h_\psi([a]^{-1} V)| \leqslant c\, d_\psi(V) + \Delta^r c_a\, d(V) + \delta^{r-n} c\, d_\psi([a]^{-1} V).$$

Comme $d_\psi(V) = \Delta^{r-1}\, d(V)$ et $d_\psi([a]^{-1}V) = \delta^{n-r+1}\, d_\psi(V)$, il vient

$$|h_\psi(V) - \delta^{r-n} h_\psi([a]^{-1}V)| \leqslant c(1+\delta)\, d_\psi(V) + c_a \Delta\, d_\psi(V) \leqslant c_1(a)\, d_\psi(V).$$

Il suffit maintenant d'écrire cette inégalité pour la variété $[a^i]^{-1}V$, $0 \leqslant i \leqslant \ell - 1$, et de sommer sur tous les i pour obtenir, vu que $\delta^{i(r-n)}\, d_\psi([a^i]^{-1}V) = \delta^i\, d_\psi(V)$:

$$|h_\psi(V) - \delta^{\ell(r-n)} h_\psi([a^\ell]^{-1}V)| \leqslant c_1(a)\, d_\psi(V)(1 + \delta + \cdots + \delta^{\ell-1}) \leqslant c_1(a)\delta^\ell\, d_\psi(V).$$

□

Dans le lemme suivant, si $\xi \in \mathbb{G}_a^n$, on note $t_\xi{:}\bar{G} \to \bar{G}$ la translation par ξ (*cf.* proposition 5.1).

LEMME 6.3. *Soit $\psi{:}\bar{G} \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ un bon plongement. Alors, pour tout point $\xi \in \mathbb{G}_a^n(\bar{k})$, il existe un réel $c(\xi) > 0$ tel que, pour toute variété fermée $V \subset \mathbb{G}_a^n$ définie sur $\bar{k}$, on ait:*

(i) $d_\psi(t_\xi(V)) = d_\psi(V)$.
(ii) $|h_\psi(t_\xi(V)) - h_\psi(V)| \leqslant c(\xi) d_\psi(V)$.

Démonstration. La proposition 3.3 et le lemme 3.6 (appliqués en prenant pour γ la translation t_ξ) donnent les inégalités du lemme lorsque ψ est l'inclusion $\bar{G} \subset \mathbb{P}_N$. On obtient ensuite le lemme pour ψ quelconque comme précédemment, en utilisant à nouveau la proposition 3.3 et le lemme 3.6, appliqués à ψ pour comparer d_ψ et d, h_ψ et h. □

Avant d'énoncer le lemme qui suit, introduisons quelques notations. Si $\mathcal{X}$ est un ensemble fini, on note $|\mathcal{X}|$ son cardinal, et si a est un élément de A, on pose $\mathrm{Ker}[a] = \{\xi \in \mathbb{G}_a^n \mid [a](\xi) = 0\}$. On remarquera que l'on a $|\mathrm{Ker}[a]| = q^{dn \deg a}$. Enfin, si $V \subset \mathbb{G}_a^n$ est une sous-variété fermée, on note S_V le stabilisateur de V, c'est-à-dire $S_V = \{\xi \in \mathbb{G}_a^n \mid \xi + V = V\}$. On a alors:

LEMME 6.4. *Soient $\psi{:}\ \bar{G} \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ un bon plongement, et a un élément non nul de A. Alors il existe un réel $c_2(a) > 0$ tel que, pour toute sous-variété irréductible $V \subset \mathbb{G}_a^n$ définie sur $\bar{k}$ et de dimension $r-1$, on ait:*

(i) $d_\psi([a]V) = \dfrac{q^{d(r-1)\deg a}}{|\mathrm{Ker}[a] \cap S_V|} d_\psi(V)$,

(ii) $|h_\psi([a]V) - \dfrac{q^{dr \deg a} h_\psi(V)}{|\mathrm{Ker}[a] \cap S_V|}| \leqslant c_2(a) \dfrac{q^{dr \deg a}}{|\mathrm{Ker}[a] \cap S_V|} d_\psi(V)$.

Démonstration. On procède comme dans [Ph3], lemme 6. Posons $\delta = q^{d \deg a}$ et $W = [a]V$. On vérifie facilement que l'on a

$$[a]^{-1}W = \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ker}[a]/(\mathrm{Ker}[a] \cap S_V)} (\xi + V), \qquad (*)$$

cette écriture étant la décomposition en composantes irréductibles de $[a]^{-1}W$. On en déduit, grâce au lemme 6.3:

$$d_\psi([a]^{-1}W) = \sum_\xi d_\psi(\xi + V) = \frac{|\operatorname{Ker}[a]|}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} d_\psi(V),$$

d'où la partie (i) du lemme grâce au lemme 6.2. De même, le lemme 6.3 et la décomposition (*) donnent

$$\begin{aligned}&\left| h_\psi([a]^{-1}W) - \frac{|\operatorname{Ker}[a]|}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} h_\psi(V) \right| \\ &\quad = \left| \sum_\xi \big(h_\psi(\xi + V) - h_\psi(V)\big) \right| \leqslant \frac{|\operatorname{Ker}[a]|}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} \left(\max_{\xi \in \operatorname{Ker}[a]} \{c(\xi)\} \right) d_\psi(V).\end{aligned}$$

Avec le lemme 6.2 et la partie (i) déjà prouvée il vient alors:

$$\begin{aligned}\left| h_\psi(W) - \frac{\delta^r}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} h_\psi(V) \right| &\leqslant \left| h_\psi(W) - \frac{\delta^r}{|\operatorname{Ker}[a]|} h_\psi([a]^{-1}W) \right| + \\ &\quad + \frac{\delta^r}{|\operatorname{Ker}[a]|} \left| h_\psi([a]^{-1}W) - \frac{|\operatorname{Ker}[a]|}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} h_\psi(V) \right| \\ &\leqslant \left(c_1(a) + \max_{\xi \in \operatorname{Ker}[a]} \{c(\xi)\} \right) \frac{\delta^r d_\psi(V)}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|}.\end{aligned}$$

On obtient bien (ii) en posant $c_2(a) = c_1(a) + \max_{\xi \in \operatorname{Ker}[a]}\{c(\xi)\}$. □

Convenons de dire qu'un point ξ de $\mathbb{G}_a^n$ est un point de *pseudo*-$[a]$-*torsion* du T-module E si $[a](\xi) = 0$. On a alors le:

LEMME 6.5. *Soient $\psi : \bar{G} \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ un bon plongement, et a un élément non nul de A. Il existe un réel $c_3(a) > 0$ tel que, pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, tout point ξ de pseudo-$[a^\ell]$-torsion de E, et toute sous-variété $V \subset \mathbb{G}_a^n$ définie sur $\bar{k}$, on ait:*

$$|h_\psi(\xi + V) - h_\psi(V)| \leqslant c_3(a) d_\psi(V).$$

Démonstration. Si $\deg a = 0$, alors le seul point de pseudo-$[a^\ell]$-torsion de E est $\xi = 0$. Dans ce cas, le lemme 6.5 est trivial avec $c_3(a) = 1$ par exemple.

Supposons maintenant $\deg a \geqslant 1$. Nous allons montrer que $c_3(a) = \frac{2q}{q-1} c_2(a)$ convient, où $c_2(a)$ est le réel du lemme 6.4. On peut évidemment supposer V irréductible, ce que nous ferons. On procède alors par récurrence sur ℓ. Si $\ell = 0$, l'inégalité à démontrer est évidemment vérifiée. Si $\ell = 1$, elle est vraie d'après le lemme 6.3, puisque pour tout point ξ de pseudo-$[a]$-torsion on a $c(\xi) \leqslant c_2(a) \leqslant c_3(a)$ d'après le choix de $c_2(a)$ fait dans la preuve du lemme 6.4. Supposons l'inégalité vraie pour $\ell - 1$ ($\ell \geqslant 2$), et soit $\xi \in \mathbb{G}_a^n$ tel que $[a^\ell](\xi) = 0$. Alors $\xi' = [a](\xi)$ est de pseudo-$[a^{\ell-1}]$-torsion, donc, par hypothèse de récurrence:

$$|h_\psi(\xi' + [a]V) - h_\psi([a]V)| \leqslant \frac{2q}{q-1} c_2(a) d_\psi([a]V). \qquad (*)$$

D'autre part, d'après le lemme 6.4 (ii) appliqué à $\xi + V$ et à V, on a, en tenant compte de $d_\psi(\xi + V) = d_\psi(V)$ et $S_{\xi+V} = S_V$:

$$|h_\psi(\xi' + [a]V) - \frac{q^{dr \deg a}}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} h_\psi(\xi + V)| \leqslant c_2(a) \frac{q^{dr \deg a}}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} d_\psi(V) \qquad (**)$$

et

$$|h_\psi([a]V) - \frac{q^{dr \deg a}}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} h_\psi(V)| \leqslant c_2(a) \frac{q^{dr \deg a}}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} d_\psi(V). \qquad (***)$$

La combinaison des inégalités $(*)$, $(**)$ et $(***)$ donne alors

$$|h_\psi(\xi + V) - h_\psi(V)| \leqslant 2c_2(a) d_\psi(V) + \frac{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|}{q^{dr \deg a}} \cdot \frac{2q}{q-1} c_2(a) d_\psi([a]V),$$

soit, d'après le lemme 6.4 (i):

$$|h_\psi(\xi + V) - h_\psi(V)| \leqslant \left(2 + \frac{2q}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{d \deg a}}\right) c_2(a) d_\psi(V).$$

Mais comme $\deg a \geqslant 1$ et $d \geqslant 1$, on a:

$$2 + \frac{2q}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{d \deg a}} \leqslant 2 + \frac{2q}{q(q-1)} = \frac{2q}{q-1},$$

d'où finalement $|h_\psi(\xi + V) - h_\psi(V)| \leqslant c_3(a) d_\psi(V)$, et l'inégalité est vraie pour ℓ. Ceci achève de démontrer le lemme. □

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme suivant, qui montre qu'on a l'inégalité (ii) du lemme 6.4 pour tout a^ℓ, $\ell \in \mathbb{N}$, avec une "constante" $c_2(a)$ indépendante de ℓ.

LEMME 6.6. *Soient ψ: $\bar{G} \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ un bon plongement, et a un élément non nul de A. Alors il existe un réel $c_4(a) > 0$ tel que, pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$ et toute sous-variété irréductible $V \subset \mathbb{G}_a^n$ définie sur $\bar{k}$ et de dimension $r-1$, on ait:*

$$\left| h_\psi([a^\ell]V) - \frac{q^{dr\ell \deg a}}{|\operatorname{Ker}[a^\ell] \cap S_V|} h_\psi(V) \right| \leqslant c_4(a) \frac{q^{dr\ell \deg a}}{|\operatorname{Ker}[a^\ell] \cap S_V|} d_\psi(V).$$

Démonstration. Elle est identique à celle du lemme 6.4, en utilisant le lemme 6.5 au lieu du lemme 6.3. On constate qu'on peut prendre $c_4(a) = c_1(a) + c_3(a)$, où $c_1(a)$ et $c_3(a)$ sont les réels des lemmes 6.2 et 6.5 respectivement. □

7. Hauteurs normalisées d'une sous-variété de $\mathbb{G}_a^n$

On reprend les notations et conventions des paragraphes précédents. En particulier, on suppose que l'on s'est fixé l'une des deux compactifications φ_i ($i = 1$ ou 2) de $\mathbb{G}_a^n$ (§ 5). Étant donné un bon plongement ψ: $\bar{G} \hookrightarrow \mathbb{P}_M$, l'objet de ce paragraphe est de définir, à la façon de [Ph3], une hauteur normalisée pour les sous-variétés définies sur $\bar{k}$ du T-module E.

La définition des hauteurs normalisées repose sur le lemme suivant:

LEMME 7.1. *Soient* $\psi:\bar{G}\hookrightarrow \mathbb{P}_M$ *un bon plongement, et* $V\subset \mathbb{G}_a^n$ *une sous-variété irréductible définie sur* $\bar{k}$. *Alors, pour tout* $a\in A$ *tel que* $\deg a\geqslant 1$, *la suite*

$$\ell\mapsto \frac{h_\psi([a^\ell]V)}{d_\psi([a^\ell]V)}\cdot\frac{d_\psi(V)}{q^{d\ell\deg a}}$$

est une suite de Cauchy, qui converge vers un réel $\geqslant 0$ *indépendant de l'élément a choisi.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que pour tout $a\in A$ tel que $\deg a\geqslant 1$, la suite est de Cauchy. Pour tout $\ell\in\mathbb{N}$ on a, d'après les lemmes 6.4 et 6.6:

$$\left|\frac{h_\psi([a^\ell]V)}{d_\psi([a^\ell]V)}\cdot\frac{d_\psi(V)}{q^{d\ell\deg a}}-h_\psi(V)\right|\leqslant c_4(a)d_\psi(V). \tag{$*$}$$

Fixons $\ell_0\in\mathbb{N}$. Pour tout $\ell\geqslant\ell_0$, l'inégalité précédente appliquée à la variété $[a^{\ell_0}]V$ donne:

$$\left|\frac{h_\psi([a^\ell]V)}{d_\psi([a^\ell]V)}\cdot\frac{d_\psi([a^{\ell_0}]V)}{q^{d(\ell-\ell_0)\deg a}}-h_\psi([a^{\ell_0}]V)\right|\leqslant c_4(a)d_\psi([a^{\ell_0}]V).$$

Ainsi, pour tous ℓ, ℓ' entiers $\geqslant\ell_0$, on a, par l'inégalité triangulaire:

$$\left|\frac{h_\psi([a^\ell]V)}{d_\psi([a^\ell]V)}\cdot\frac{d_\psi(V)}{q^{d\ell\deg a}}-\frac{h_\psi([a^{\ell'}]V)}{d_\psi([a^{\ell'}]V)}\cdot\frac{d_\psi(V)}{q^{d\ell'\deg a}}\right|\leqslant\frac{2c_4(a)d_\psi(V)}{q^{d\ell_0\deg a}}.$$

Ceci montre que la suite est bien de Cauchy puisque

$$\lim_{\ell_0\to+\infty}\frac{2c_4(a)d_\psi(V)}{q^{d\ell_0\deg a}}=0.$$

Pour montrer maintenant que la limite est indépendante de l'élément choisi, prenons a et b deux éléments de A de degré $\geqslant 1$, et posons $c=ab$. Notons ℓ_a, ℓ_b, et ℓ_c les limites correspondant à a, b, c respectivement. En appliquant l'inégalité $(*)$ à la variété $[b^\ell]V$, en divisant chaque membre par la quantité $\frac{d_\psi(V)}{q^{d\ell\deg b}d_\psi([b^\ell]V)}$, puis en faisant tendre ℓ vers l'infini, il vient alors $\ell_c=\ell_b$, et de même on a $\ell_c=\ell_a$. D'où le lemme. $\square$

Compte tenu du lemme précédent on peut finalement poser:

DÉFINITION 7.2. Soient $\psi:\bar{G}\hookrightarrow\mathbb{P}_M$ un bon plongement et $V\subset\mathbb{G}_a^n$ une variété affine définie sur $\bar{k}$. On appelle *hauteur normalisée de* V associée au plongement ψ, et on note $\hat{h}_\psi(V)$, le réel $\geqslant 0$ défini comme suit:

(i) Si V est irréductible, alors

$$\hat{h}_\psi(V):=\lim_{\ell\to+\infty}\frac{h_\psi([a^\ell]V)}{d_\psi([a^\ell]V)}\cdot\frac{d_\psi(V)}{q^{d\ell\deg a}},$$

où a est un élément quelconque de A tel que $\deg a \geqslant 1$.

(ii) Si V est quelconque, alors $\hat{h}_\psi(V) := \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \hat{h}_\psi(V_j)$, où $V_1, \ldots, V_s$ sont les composantes irréductibles de V de même dimension que V.

Lorsque ψ est simplement l'inclusion $\bar{G} \subset \mathbb{P}_N$, on notera plus simplement $\hat{h}$ au lieu de $\hat{h}_\psi$. On notera qu'en fait la hauteur normalisée définie ici dépend aussi de la compactification choisie $\varphi_i: \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow \bar{G} \subset \mathbb{P}_N$ ($i = 1$ ou 2), et il serait plus correct d'écrire $\hat{h}_{i,\psi}$ et $\hat{h}_i$ au lieu de $\hat{h}_\psi$ et $\hat{h}$. Mais pour alléger l'écriture et puisque φ_i reste ici fixé, nous ne l'avons pas fait figurer dans la notation. D'autre part, lorsque les modules de Drinfeld sont de même rang d, que l'on choisit le plongement $\varphi_1: \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$, que l'on prend pour ψ l'inclusion $\bar{G} \subset \mathbb{P}_n$, et que la variété V est réduite à un point $x \in \mathbb{G}_a^n(\bar{k})$, alors on retrouve la hauteur canonique de Denis ([De2]).

Les principales propriétés de la hauteur normalisée sont résumées dans le théorème ci-après. On dira pour abréger qu'une variété $V \subset \mathbb{G}_a^n$ est "stable par [.]" si $[a](V) \subset V$ pour tout $a \in A$.

THÉORÈME 7.3. *Soit $\psi: \bar{G} \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ un bon plongement. La fonction $\hat{h}_\psi$ vérifie les propriétés suivantes, valables pour toute variété $V \subset \mathbb{G}_a^n$ irréductible, définie sur $\bar{k}$ et de dimension $r - 1$:*

(i) *Pour tout $a \in A$, $a \neq 0$,*

$$\hat{h}_\psi([a]V) = \frac{q^{dr \deg a}}{|\operatorname{Ker}[a] \cap S_V|} \hat{h}_\psi(V).$$

(ii) *Pour tout $a \in A$, $a \neq 0$,*

$$\hat{h}_\psi([a]^{-1} V) = q^{d(n-r) \deg a} \hat{h}_\psi(V).$$

(iii) *Pour tout point ξ de "pseudo-torsion", $\hat{h}_\psi(\xi + V) = \hat{h}_\psi(V)$.*

(iv) *$|\hat{h}_\psi(V) - h_\psi(V)| \leqslant c d_\psi(V)$, où c dépend des modules de Drinfeld, de la compactification fixée pour $\mathbb{G}_a^n$ et de ψ.*

(v) *Si V est translaté d'un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbb{G}_a^n$ stable par $[\cdot]$, par un point de pseudo-torsion, alors $\hat{h}_\psi(V) = 0$.*

(vi) *Si ψ est de degré Δ, alors $\hat{h}_\psi(V) = \Delta^r \hat{h}(V)$.*

Démonstration. (i) On peut supposer $\deg a \geqslant 1$, sinon l'assertion est claire. L'inégalité $(*)$ de la preuve du lemme 7.1, appliquée avec $[a^\ell]V$ au lieu de V et 1 au lieu de ℓ, donne, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{h_\psi\big([a^\ell]([a]V)\big)}{d_\psi\big([a^\ell]([a]V)\big)} \cdot \frac{1}{q^{d\ell \deg a}.q^{d \deg a}} - \frac{h_\psi([a^\ell]V)}{d_\psi([a^\ell]V)} \cdot \frac{1}{q^{d\ell \deg a}} \right| \leqslant \frac{c_4(a)}{q^{d\ell \deg a}}.$$

Par passage à la limite lorsque $\ell \to +\infty$, on obtient bien (i) compte tenu du lemme 6.4.

(iii) Si $a \in A$ est tel que $\deg a \geqslant 1$ et $[a](\xi) = 0$, alors $[a^\ell](\xi + V) = [a^\ell](V)$ pour tout $\ell \geqslant 1$, $d_\psi(\xi + V) = d_\psi(V)$, d'où $\hat{h}_\psi(\xi + V) = \hat{h}_\psi(V)$ en revenant à la définition.

(ii) Posons $W = [a]^{-1}V$. Si X est une composante irréductible de W, alors $[a](X) = V$ et $W = \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ker}[a]/(\mathrm{Ker}[a] \cap S_X)}(\xi + X)$, cette décomposition étant la décomposition en composantes irréductibles de W. Il en résulte, d'après (iii):

$$\hat{h}_\psi(W) = \frac{|\,\mathrm{Ker}[a]|}{|\,\mathrm{Ker}[a] \cap S_X|}\hat{h}_\psi(X).$$

Appliquons maintenant (i) à X, il vient

$$\hat{h}_\psi([a]X) = \frac{q^{dr \deg a}}{|\,\mathrm{Ker}[a] \cap S_X|}\hat{h}_\psi(X).$$

On obtient donc

$$\hat{h}_\psi(W) = \frac{|\,\mathrm{Ker}[a]|}{q^{dr \deg a}}\hat{h}_\psi([a]X),$$

qui est bien l'égalité annoncée puisque $|\,\mathrm{Ker}[a]| = q^{dn \deg a}$. On notera que la méthode utilisée dans [Ph3] consistant simplement à appliquer (i) à W n'est pas correcte, car (i) n'est pas valable pour des variétés non irréductibles. La méthode employée ici corrige donc l'argument de [Ph3].

(iv) On prend par exemple $a = T$ et l'on utilise à nouveau l'inégalité $(*)$ de la démonstration du lemme 7.1. La propriété s'obtient par passage à la limite lorsque $\ell \to +\infty$.

(v) Si $V = \xi + H$ avec H sous-groupe connexe de $\mathbb{G}_a^n$ stable par $[\cdot]$ et ξ point de pseudo-$[a]$-torsion (on peut évidemment supposer $\deg a \geqslant 1$), alors $[a]V = [a]H = H$, d'où $[a^\ell]V = H$ pour tout $\ell \geqslant 1$ et le résultat en faisant tendre ℓ vers l'infini dans la définition de $\hat{h}_\psi(V)$.

(vi) La proposition 3.3 et le lemme 3.6 appliqués à l'isomorphisme $\gamma = \psi\colon \bar{G} \to \psi(\bar{G})$ donnent, pour toute variété fermée $W \subset \bar{G}$, $|h_\psi(W) - \Delta^r h(W)| \leqslant c d_\psi(W)$ et $d_\psi(W) = \Delta^{r-1}d(W)$. On en déduit que si $a \in A$ est tel que $\deg a \geqslant 1$ et $\ell \in \mathbb{N}$, alors

$$\left|\frac{h_\psi([a^\ell]V)}{d_\psi([a^\ell]V)} \cdot \frac{d_\psi(V)}{q^{d\ell \deg a}} - \Delta^r \frac{h([a^\ell]V)}{d([a^\ell]V)} \cdot \frac{d(V)}{q^{d\ell \deg a}}\right| \leqslant c\frac{d_\psi(V)}{q^{d\ell \deg a}}.$$

Par passage à la limite lorsque $\ell \to +\infty$, on obtient le résultat. □

Signalons pour terminer le résultat de comparaison suivant, qui permet de comparer les hauteurs normalisées correspondant aux deux compactifications φ_1 et φ_2. Pour $i \in \{1, 2\}$, on notera ici $\hat{h}_i$ la hauteur normalisée $\hat{h}$ associée à φ_i (*cf.* la remarque suivant la définition 7.2).

PROPOSITION 7.4. *Soit $V \subset \mathbb{G}_a^n$ une variété affine définie sur $\bar{k}$ de dimension $r - 1$. Alors on a:*

$$\hat{h}_1(V) \leqslant \hat{h}_2(V) \leqslant n^r \hat{h}_1(V).$$

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où V est irréductible. Dans ce cas, d'après les résultats établis dans [Da-Ph2] (preuve de la proposition 2.2), on a l'encadrement, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $a \in A$ tel que $\deg a \geqslant 1$ (l'indice i se rapporte au plongement φ_i):

$$h_1([a^\ell]V) \leqslant h_2([a^\ell]V) \leqslant n^r h_1([a^\ell]V).$$

La proposition s'en déduit aussitôt puisque d'après le lemme 6.4 on a

$$\frac{d_1([a^\ell]V)}{d_1(V)} = \frac{d_2([a^\ell]V)}{d_2(V)}. \qquad \square$$

8. Propriété du $\hat{h}$

On garde les notations des paragraphes précédents, mais on suppose en outre que les n modules de Drinfeld $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ sont deux à deux isogènes, de rang commun $d \geqslant 1$. Le morphisme $[a]:\mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a^n$ est alors simplement l'action diagonale sur $\mathbb{G}_a^n$. On appellera sous-T-module de E tout sous-groupe algébrique connexe B de $\mathbb{G}_a^n$ tel que $\forall\, a \in A,\ [a](B) \subset B$. Si $V \subset \mathbb{G}_a^n$ est une variété irréductible, on dira que V est une variété de torsion si V est translatée d'un sous-T-module de E par un point de torsion de E. Enfin, on désigne par E_{tors} l'ensemble des points de torsion de E, et si $V \subset \mathbb{G}_a^n$ est une variété affine, on note $V_{\mathrm{tors}} = V \cap E_{\mathrm{tors}}$.

Au paragraphe précédent on a vu que si $\psi:\bar{G} \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ est un bon plongement, alors pour toute variété de torsion $V \subset \mathbb{G}_a^n$ irréductible et définie sur $\bar{k}$, on a $\hat{h}_\psi(V) = 0$. On va démontrer ici que la réciproque est vraie dans le cas où l'analogue de la conjecture de Lang-Manin-Mumford énoncée ci-dessous est vraie. Compte tenu du théorème 7.3 (vi), on peut supposer que ψ est l'inclusion $\bar{G} \subset \mathbb{P}_M$. On omettra donc l'indice ψ dans ce qui suit.

L'analogue de la conjecture de Lang-Manin-Mumford que nous utiliserons est la suivante (voir [De1]). Notons que sa preuve vient d'être annoncée par Scanlon ([Sc]).

CONJECTURE LMM. *Soit $V \subset \mathbb{G}_a^n$ une variété affine (non nécessairement irréductible). Alors il existe un nombre fini (éventuellement égal à zéro) de points de torsion de E, soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, et des sous-T-modules de E, $B_1, \ldots, B_s$, tels que: $V_{\mathrm{tors}} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s} (\gamma_i + (B_i)_{\mathrm{tors}})$.*

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant (propriété du $\hat{h}$):

THÉORÈME 8.1. *Supposons que la conjecture LMM soit vraie. Alors, pour $V \subset \mathbb{G}_a^n$ variété affine irréductible définie sur $\bar{k}$, on a:*

$$\hat{h}(V) = 0 \iff V \text{ est une variété de torsion.}$$

Lorsque V est réduite à un point $x \in \mathbb{G}_a^n$, la conclusion signifie que $\hat{h}(x) = 0$ si et seulement si x est un point de torsion de E. Le résultat a été démontré dans ce cas dans [De2].

La démonstration du théorème 8.1 s'inspire des techniques d'approximation diophantienne de [Ph5]. Jusqu'à la fin du texte, on travaille dorénavant avec le plongement $\varphi_2 = \sigma \circ \iota$, où $\iota : \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow (\mathbb{P}_1)^n$ et $\sigma : (\mathbb{P}_1)^n \xhookrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_N$. La proposition 7.4 montre que ce n'est pas une restriction. Soit alors a un élément de A tel que $\deg a \geqslant 1$, fixé une fois pour toutes. On fixe encore K un corps sur lequel tous les modules de Drinfeld sont définis, et on note $D = [K : k]$. On choisit alors L un entier suffisamment grand (L tendra vers l'infini à la fin) pour que les deux conditions suivantes soient vérifiées:

$$L/2 \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2} q^{2dL \deg a} \geqslant D q^{\frac{3}{2} dL \deg a}. \tag{$*$}$$

Dans toute la suite, $c_1, \ldots, c_8$ désignent des "constantes", c'est-à-dire des réels ne dépendant que des modules de Drinfeld, de l'élément $a \in A$ fixé, de n et de $D = [K : k]$, mais ils ne dépendent pas de L.

On a vu que le morphisme $[a^L] : \mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a^n$ se prolonge en un morphisme $[a^L] : (\mathbb{P}_1)^n \to (\mathbb{P}_1)^n$, ce qui permet de définir $i_L : (\mathbb{P}_1)^n \hookrightarrow (\mathbb{P}_1)^n \times (\mathbb{P}_1)^n$ par $i_L(x) = (x, [a^L](x))$. On note encore $s : (\mathbb{P}_1)^n \times (\mathbb{P}_1)^n \hookrightarrow \mathbb{P}_M$ le plongement de Segre, et $\psi_L = s \circ i_L : (\mathbb{P}_1)^n \hookrightarrow \mathbb{P}_M$. On pose enfin $\delta_L = q^{dL \deg a}$ et $\Delta_L = 1 + \delta_L$. La preuve du théorème 8.1 repose sur les lemmes 8.2 à 8.5 ci-après.

LEMME 8.2. *Pour toute variété affine $V \subset \mathbb{G}_a^n$ définie sur $\bar{k}$ de dimension $r - 1$, on a:*

(i) $d_{\psi_L}(V) = \Delta_L^{r-1} d(V)$.
(ii) $|\hat{h}_{\psi_L}(V) - h_{\psi_L}(V)| \leqslant c_1\, d_{\psi_L}(V)$.

Démonstration. L'assertion (i) résulte du lemme 3.6 appliqué à l'isomorphisme $(\mathbb{P}_1)^n \to \psi_L((\mathbb{P}_1)^n)$. Pour prouver (ii), munissons $\mathbb{G}_a^n \times \mathbb{G}_a^n$ de la structure de T-module produit donnée par l'action diagonale, *i.e.* pour $b \in A$ et $(x, y) \in \mathbb{G}_a^n \times \mathbb{G}_a^n$, $[b](x, y) = ([b](x), [b](y))$. On peut alors définir une hauteur normalisée $\hat{h}'$ associée à ce nouveau T-module et à la compactification $\mathbb{G}_a^{2n} \hookrightarrow (\mathbb{P}_1)^n \times (\mathbb{P}_1)^n \xhookrightarrow{s} \mathbb{P}_M$. On constate maintenant avec les définitions que $\hat{h}_{\psi_L}(V) = \hat{h}'(i_L(V))$, où on a noté encore $i_L : \mathbb{G}_a^n \hookrightarrow \mathbb{G}_a^n \times \mathbb{G}_a^n$ la restriction du i_L précédent. Il suffit donc d'appliquer le théorème 7.3 (iv) à $\hat{h}'$ et à la variété $i_L(V)$, puisque par définition $d_{\psi_L}(V) = d(i_L(V))$ et $h_{\psi_L}(V) = h(i_L(V))$. L'intérêt d'introduire $\hat{h}'$ ici est d'obtenir une constante c_1 indépendante de L. □

LEMME 8.3 (lemme de Siegel). *Soient c_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, $1 \leqslant j \leqslant \nu$, des éléments de K. On suppose $\nu \geqslant \mu D + 1$. Alors il existe des éléments $p_1, \ldots, p_\nu$ de A, non tous nuls, vérifiant:*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu} c_{ij} p_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu, \quad \textit{et} \quad \deg p_j \leqslant c_2 \frac{\mu}{\nu - D\mu} h, \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu,$$

où h désigne la hauteur logarithmique et absolue de Weil du point projectif dont les coordonnées sont 1 et les c_{ij}.

Démonstration. Voir [Wa]. On peut prendre $c_2 = \max\{D, 2g\}$, où g est le genre du corps $k((c_{ij})_{i,j})$. □

Dans le lemme suivant, $A[\mathbb{P}_M]$ désigne l'anneau des coordonnées de $\mathbb{P}_M$ (avec coefficients dans A).

LEMME 8.4. *Soient* $\pi\colon \mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a$ *la projection sur le premier facteur, et* x_1 *un point de torsion de* Φ_1. *Soit encore* $V \subset \mathbb{G}_a^n$ *une variété irréductible telle que* $\pi(V) = \mathbb{G}_a$. *Alors il existe un polynôme homogène* $p \in A[\mathbb{P}_M]$, *non identiquement nul sur* $\psi_L(V)$, *de degré* $3\Delta_L$, *de hauteur* $h(p) \leqslant c_5 L\delta_L$, *et tel que pour tout* $t \in \psi_L(V \cap \pi^{-1}(x_1))$, *on ait* $\mathrm{ord}_{t,\overline{\psi_L(V)}}\, p \geqslant \delta_L^{3/2}$.

Démonstration. Notons $\theta_0\colon \mathbb{G}_a \xhookrightarrow{i_0} \mathbb{G}_a^2 \hookrightarrow (\mathbb{P}_1)^2 \xhookrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_3$, où la première flèche est donnée par $x \mapsto (x, \Phi_1(a^L)(x))$. Le morphisme ψ_L se factorise alors en ψ_L: $\mathbb{G}_a^n \xhookrightarrow{\theta} \mathbb{P}_3 \times \cdots \times \mathbb{P}_3 \xhookrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_M$, et on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_a^n \arrow[r, hook, "\theta"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}_3 \times \cdots \times \mathbb{P}_3 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}_M \\
\mathbb{G}_a \arrow[r, hook, "\theta_0"] & \mathbb{P}_3 &
\end{tikzcd}$$

On notera $C[X_1]$ l'anneau des coordonnées de $\mathbb{G}_a$ et $C[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3]$ celui de $\mathbb{P}_3$. Soit $\mathfrak{p} = \mathcal{I}(\theta_0(\mathbb{G}_a)) \subset \bar{k}[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3]$ l'idéal homogène premier de $\overline{\theta_0(\mathbb{G}_a)} \subset \mathbb{P}_3$, et pour δ élément de $\mathbb{N}$, posons $\mathcal{H}_g(\mathfrak{p}, \delta) = \dim_{\bar{k}}\big(\bar{k}[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3]/\mathfrak{p}\big)_\delta$. D'après la proposition 4.3 de [Da-Ph2], puisque $\mathfrak{p}$ est de hauteur $3 + 1 - r = 2$, on a la minoration $\mathcal{H}_g(\mathfrak{p}, \delta) \geqslant (\delta - 2\,d(\mathfrak{p}))\,d(\mathfrak{p})$ pour tout $\delta > 2\,d(\mathfrak{p})$. Comme $d(\mathfrak{p}) = d(\theta_0(\mathbb{G}_a)) = 1 + \delta_L$ d'après le lemme 8.2, on a donc $\mathcal{H}_g(\mathfrak{p}, 3\Delta_L) \geqslant (1 + \delta_L)^2 \geqslant \delta_L^2$.

Ceci étant, posons $v = \mathcal{H}_g(\mathfrak{p}, 3\Delta_L)$, et notons, pour $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_3) \in \mathbb{N}^4$, $Z^\lambda = Z_0^{\lambda_0} Z_1^{\lambda_1} Z_2^{\lambda_2} Z_3^{\lambda_3}$. Soit alors $\Lambda \subset \mathbb{N}^4$ tel que $\{Z^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ forme une base de $(\bar{k}[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3]/\mathfrak{p})_{3\Delta_L}$. On va chercher tout d'abord un polynôme p de la forme $p = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda Z^\lambda$, à coefficients dans A non tous nuls, de hauteur $h(p) \leqslant c_5 L\delta_L$, et s'annulant en $\theta_0(x_1)$ à un ordre $\geqslant \delta_L^{3/2}$. Puisque $\theta_0(x_1) = (1, \Phi_1(a^L)(x_1), x_1, x_1\Phi_1(a^L)(x_1))$, la condition d'annulation revient à dire que le polynôme $q(X_1) = p(1, \Phi_1(a^L)(X_1), X_1, X_1\Phi_1(a^L)(X_1))$ s'annule en x_1 à un ordre $\geqslant \delta_L^{3/2}$. Écrivons $\Phi_1(a^L)\ (X_1) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant dLm} a_{i,L} X_1^{q^i}$, où $m = \deg a$. Alors pour tout $y \in C$ on a $q(x_1 + y) = \sum_{j \geqslant 0} c_j y^j$, où $c_j = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda c_{j\lambda}$, et $c_{j\lambda}$ est une somme de termes de la forme

$$x_1^{n_0}\big(\Phi_1(a^L)(x_1)\big)^{n_1} a_{j_1,L} \cdots a_{j_{n_2},L},$$

avec

$$0 \leqslant n_0 \leqslant \lambda_2 + \lambda_3,\ \ 0 \leqslant n_1 + n_2 \leqslant \lambda_1 + \lambda_3,\ \text{ et } q^{j_1} + \cdots + q^{j_{n_2}} + \lambda_2 + \lambda_3 - n_0 = j.$$

On doit donc résoudre le système linéaire $\sum_{\lambda \in \Lambda} c_{j\lambda} p_\lambda = 0$, $0 \leqslant j < \delta_L^{3/2}$, d'inconnues les p_λ et de coefficients les $c_{j\lambda} \in K$. D'après le lemme de Siegel 8.3 (qui s'applique puisque d'après l'inégalité $v \geqslant \delta_L^2$ et les conditions $(*)$ on a $v - \mu D \geqslant \frac{1}{2}\delta_L^2$), on peut trouver une solution telle que

$$\deg p_\lambda \leqslant c_2 \frac{\mu}{\nu - D\mu} h \leqslant 2c_2 h \delta_L^{-1/2}$$

pour tout λ. Maintenant, d'après la forme des coefficients $c_{j\lambda}$, des calculs standards de hauteurs donnent l'estimation

$$h \leqslant 3\Delta_L h(x_1) + 3\Delta_L h(\Phi_1(a^L)(x_1)) + L\delta_L^{3/2} h_a,$$

où h_a ne dépend que de $\Phi_1(a)$ mais pas de L. Mais $h(x_1) \leqslant c_3$ puisque x_1 est un point de torsion de Φ_1 (théorème 7.3 (iv) et (v)), et de même $h(\Phi_1(a^L)(x_1)) \leqslant c_3$. On a donc $h \leqslant c_4 L\delta_L^{3/2}$, et finalement $\deg p_\lambda \leqslant c_5 L\delta_L$ pour tout λ, d'où $h(p) = \max_\lambda\{\deg p_\lambda\} \leqslant c_5 L\delta_L$.

Pour achever la preuve du lemme il suffit de remonter le polynôme p dans la fibre au-dessus de x_1. Plus précisément, soient T_j, $j \in \{0, \ldots, 3\}^n$ les coordonnées de $\mathbb{P}_M$, de sorte que le point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \pi^{-1}(x_1)$ ait pour image par ψ_L le point $t = (t_j)_j$ avec

$$t_{(0,\ldots,0)} = 1, \qquad t_{(1,0,\ldots,0)} = \Phi_1(a^L)(x_1),$$
$$t_{(2,0,\ldots,0)} = x_1, \qquad t_{(3,0,\ldots,0)} = x_1\Phi_1(a^L)(x_1).$$

On vérifie alors que le polynôme de $A[\mathbb{P}_M]$ défini par $p(T_{(0,\ldots,0)}, T_{(1,0,\ldots,0)}, T_{(2,0,\ldots,0)}, T_{(3,0,\ldots,0)})$ répond à la question (ce polynôme n'est pas nul sur $\psi_L(V)$ car $\pi(V) = \mathbb{G}_a$ et p n'est pas nul sur $\theta_0(\mathbb{G}_a)$). $\square$

Le lemme suivant nous permettra de faire une récurrence sur la dimension de la variété.

LEMME 8.5. *Soit $V \subset \mathbb{G}_a^n$ une variété affine irréductible définie sur $\bar{k}$ de dimension $\geqslant 1$, et soit $\pi : \mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a$ la projection sur le premier facteur. On suppose que $\pi(V) = \mathbb{G}_a$ et l'on se donne $x \in \mathbb{G}_a$ un point de Φ_1-torsion tel que $\dim(V \cap \pi^{-1}(x)) = \dim V - 1$. Alors, si $\hat{h}(V) = 0$, on a aussi $\hat{h}\big(V \cap \pi^{-1}(x)\big) = 0$.*

Démonstration. Soit p le polynôme donné par le lemme précédent (pour L choisi suffisamment grand). On peut alors définir le cycle intersection $\overline{\psi_L(V)}.Z_p$ (§ 4). Soient $W_1, \ldots, W_s$ les composantes irréductibles de $\overline{\psi_L(V \cap \pi^{-1}(x))}$ (qui sont toutes de même dimension $\dim V - 1$). Comme $\psi_L(V \cap \pi^{-1}(x)) \subset \psi_L(V) \cap Z_p$, $W_1, \ldots, W_s$ sont des composantes du cycle $\overline{\psi_L(V)}.Z_p$, qui admet donc une écriture de la forme $\overline{\psi_L(V)}.Z_p = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i[W_i] + S$ pour un certain cycle S. Remarquons maintenant que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant s$, $\psi_L(V \cap \pi^{-1}(x)) \cap W_i$ est un ouvert non vide, donc dense, de W_i. D'après le corollaire 4.4, pour chaque $i \in \{1, \ldots, s\}$, il existe donc un point $t_i \in \psi_L(V \cap \pi^{-1}(x)) \cap W_i$ tel que $m_{t_i}(\overline{\psi_L(V)}.Z_p) = n_i$. Appliquons maintenant le théorème 4.2, il vient

$$n_i = m_{t_i}(\overline{\psi_L(V)}.Z_p) \geqslant \operatorname{ord}_{t_i,\overline{\psi_L(V)}} p \geqslant \delta_L^{3/2},$$

d'où

$$h(\overline{\psi_L(V)}.Z_p) \geqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i h(W_i) \geqslant \delta_L^{3/2} \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} h(W_i) = \delta_L^{3/2} h_{\psi_L}(V \cap \pi^{-1}(x)).$$

Le théorème 4.1 (ii), appliqué dans $\mathbb{P}_M$, donne alors:

$$\delta_L^{3/2} h_{\psi_L}(V \cap \pi^{-1}(x)) \leqslant 3\Delta_L h_{\psi_L}(V) + c_5 L \delta_L d_{\psi_L}(V).$$

Mais $\hat{h}_{\psi_L}(V) = \hat{h}(V) = 0$ (théorème 7.3 (vi)), donc $h_{\psi_L}(V) \leqslant c_1 d_{\psi_L}(V)$ par le lemme 8.2, et par suite

$$\begin{aligned}\delta_L^{3/2} h_{\psi_L}(V \cap \pi^{-1}(x)) &\leqslant c_6 L \delta_L d_{\psi_L}(V) = c_6 L \delta_L (1+\delta_L)^{r-1} d(V) \\ &\leqslant c_7 L \delta_L^r d(V) \quad (r = \dim V + 1).\end{aligned}$$

Combinons maintenant cette majoration avec le théorème 7.3 (vi) et le lemme 8.2 (appliqués à $V \cap \pi^{-1}(x)$), il vient:

$$\begin{aligned}\delta_L^{3/2}(1+\delta_L)^{r-1} \hat{h}(V \cap \pi^{-1}(x)) = \delta_L^{3/2} \hat{h}_{\psi_L}(V \cap \pi^{-1}(x)) &\leqslant c_7 L \delta_L^r d(V) \\ &+ c_8 \delta_L^{3/2} \delta_L^{r-2} d(V \cap \pi^{-1}(x)),\end{aligned}$$

d'où $0 \leqslant \hat{h}(V \cap \pi^{-1}(x)) \leqslant c_7 L \delta_L^{-1/2} d(V) + c_8 \delta_L^{-1} d(V \cap \pi^{-1}(x))$. En faisant maintenant tendre L vers l'infini on obtient $\hat{h}(V \cap \pi^{-1}(x)) = 0$. □

On peut maintenant démontrer le théorème 8.1.

Démonstration du théorème 8.1. Si V est une variété de torsion, alors $\hat{h}(V) = 0$ d'après le théorème 7.3 (v). Pour montrer la réciproque, on procède par récurrence sur la dimension de V. Si $\dim V = 0$, avec $V = \{x\}$, on sait que x est un point de torsion ([De2]). Supposons maintenant $\dim V \geqslant 1$, et que la propriété soit vraie pour les variétés de dimension $\dim V - 1$. On posera $r = \dim V + 1$.

Comme $\dim V \geqslant 1$, il existe une projection $\pi : \mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a$ sur un des facteurs $\mathbb{G}_a$ telle que $\dim \pi(V) = 1$, *i.e.* $\pi(V) = \mathbb{G}_a$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que c'est la projection sur le premier facteur. Par ailleurs, d'après la conjecture LMM, il existe un ensemble fini d'indices I, des sous-T-modules B_i de E et des points de torsion γ_i $(i \in I)$, tels que

$$V \cap E_{\text{tors}} = \bigcup_{i \in I} \big(\gamma_i + (B_i)_{\text{tors}}\big). \qquad (*)$$

Soient maintenant F_1 l'ensemble des points de torsion x de Φ_1 tels que $\dim(V \cap \pi^{-1}(x)) \neq r-2$, et $F_2 = \{\pi(\gamma_i) \mid i \in I\}$. L'ensemble $F = F_1 \cup F_2$ est fini. Choisissons $x \notin F$ tel que x soit de Φ_1-torsion. Alors $\dim(V \cap \pi^{-1}(x)) = r-2$, donc, par le lemme précédent, $\hat{h}(V \cap \pi^{-1}(x)) = 0$. Par hypothèse de récurrence appliquée à chaque composante irréductible de $V \cap \pi^{-1}(x)$, il existe un ensemble fini (non vide) I', des sous-T-modules B'_i et des points $\gamma'_i \in E_{\text{tors}}$ $(i \in I')$, tels que

$$V \cap \pi^{-1}(x) = \bigcup_{i \in I'} (\gamma_i' + B_i'). \tag{$**$}$$

En particulier, l'égalité $(**)$ montre que $V \cap \pi^{-1}(x) \cap E_{\text{tors}} \neq \emptyset$, donc $V \cap E_{\text{tors}} \neq \emptyset$, et l'ensemble I de l'égalité $(*)$ est non vide. Cette égalité $(*)$ nous donne:

$$V \cap E_{\text{tors}} \cap \pi^{-1}(x) = \bigcup_{i \in I''} \big((\gamma_i + (B_i)_{\text{tors}}) \cap \pi^{-1}(x)\big),$$

où $I'' = \{i \in I \mid (\gamma_i + (B_i)_{\text{tors}}) \cap \pi^{-1}(x) \neq \emptyset\}$, ensemble qui est non vide. Or, on a:

$$(\gamma_i + (B_i)_{\text{tors}}) \cap \pi^{-1}(x) \neq \emptyset \iff (B_i)_{\text{tors}} \cap (\pi^{-1}(x) - \gamma_i) \neq \emptyset.$$

Choisissons alors, pour $i \in I''$, $b_i \in (B_i)_{\text{tors}} \cap (\pi^{-1}(x) - \gamma_i)$, et posons

$$\gamma_i'' = b_i + \gamma_i, \quad B_i'' = \big(B_i \cap (\pi^{-1}(x) - \gamma_i)\big) - b_i.$$

On vérifie facilement que B_i'' est un sous-groupe algébrique (non nécessairement connexe) de $\mathbb{G}_a^n$, stable par $[\cdot]$, que $\gamma_i'' \in E_{\text{tors}}$, et que l'on a:

$$V \cap E_{\text{tors}} \cap \pi^{-1}(x) = \bigcup_{i \in I''} (\gamma_i'' + (B_i'')_{\text{tors}}).$$

Ainsi, on a:

$$V \cap E_{\text{tors}} \cap \pi^{-1}(x) = \bigcup_{i \in I''} (\gamma_i'' + (B_i'')_{\text{tors}}) = \bigcup_{i \in I'} (\gamma_i' + (B_i')_{\text{tors}}). \tag{$***$}$$

On constate maintenant que $\dim B_i'' = \dim\big(B_i \cap (\pi^{-1}(x) - \gamma_i)\big) = \dim B_i - 1$ pour tout $i \in I''$: en effet, $\pi^{-1}(x) - \gamma_i$ est une hypersurface de $\mathbb{G}_a^n$ qui ne peut contenir B_i, car sinon on aurait $0 \in \pi^{-1}(x) - \gamma_i$, et par suite on aurait $x \in F_2$. D'autre part, d'après $(**)$ il existe un indice $i_0 \in I'$ tel que $\dim B_{i_0}' = \dim V - 1$. Mais alors $\gamma_{i_0}' + B_{i_0}' \subset \bigcup_{i \in I''} (\gamma_i'' + B_i'')$ d'après $(***)$, d'où l'existence d'un indice $i_1 \in I''$ tel que $\dim B_{i_0}' \leqslant \dim B_{i_1}''$. En récapitulant, on a donc: $\dim V - 1 = \dim B_{i_0}' \leqslant \dim B_{i_1}'' = \dim B_{i_1} - 1 \leqslant \dim V - 1$. On obtient donc $\dim B_{i_1} = \dim V$, et comme $\gamma_{i_1} + B_{i_1} \subset V$ et que V est irréductible, il vient finalement $V = \gamma_{i_1} + B_{i_1}$. $\square$

Références

[Ca-Fr] Cassels, J. W. S. et Fröhlich, A.: *Algebraic Number Theory*, Academic Press, New York, 1993.

[Da-Ph1] David, S. et Philippon, P.: Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes, dans Number Theory, K. Murty, M. Waldschmidt (eds), *Contemp. Math.* 210, Amer. Math. Soc. Providence, 1998, pp. 333–364.

[Da-Ph2] David, S. et Philippon, P.: Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV* **28**(3) (1999), 489–543.

[De1] Denis, L.: Géométrie diophantienne sur les modules de Drinfeld, dans D. Goss, D. R. Hayes, M. I. Rosen (eds), *The Arithmetic of Function Fields*, Proc. Workshop at the Ohio State University, Walter de Gruyter, 1992, pp. 285–302.

[De2] Denis, L.: Hauteurs canoniques et modules de Drinfeld, *Math. Ann.* **294** (1992), 213–223.

[Fu] Fulton, W.: *Intersection Theory*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[Ha] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Grad. Texts Math. 52, Springer-Verlag, New York, 1993.

[Hi] Hindry, M.: Autour d'une conjecture de Serge Lang, *Invent. Math.* **94** (1988), 575–603.

[Ne] Nesterenko, Y.: Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers, *Math. USSR Izvestija* **11** (1977), 239–270.

[Ph1] Philippon, P.: Critères pour l'indépendance algébrique, *Publ. Math. Inst. Hautes Etude Sci.* **64** (1986), 5–52.

[Ph2] Philippon, P.: Théorème des zéros effectif et élimination, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux **1** (1989), 137–155.

[Ph3] Philippon, P.: Sur des hauteurs alternatives I, *Math. Ann.* **289** (1991), 255–283.

[Ph4] Philippon, P.: Sur des hauteurs alternatives II, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **44** (1994), 1043–1065.

[Ph5] Philippon, P.: Sur des hauteurs alternatives III, *J. Math. Pures Appl.* **74** (1995), 345–365.

[Ph6] Philippon, P.: Quatre exposés sur la théorie de l'élimination, Cours de DEA intensif, CIRM-Luminy (avril 1993).

[Re] Rémond, G.: Sur des problèmes d'effectivité en géométrie diophantienne, Thèse de doctorat de l'Université Paris VI (1997).

[Sc] Scanlon, T.: Diophantine geometry of the torsion of a Drinfeld module, manuscrit.

[Se] Serre, J. P.: Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, dans Nombres transcendants et groupes algébriques, Michel Waldschmidt, *Astérisque* (1979), 69–70.

[Ul] Ullmo, E.: Positivité et discrétion des points algébriques des courbes, *Ann. of Math.* **147** (1998), 167–179.

[Wa] Waldschmidt, M.: Transcendance en caractéristique finie et modules de Drinfeld, cours de 3ème cycle à l'I H P (1989).

[Zh1] Zhang, S.: Small points and adelic metrics, *J. Algebraic Geom.* **4** (1995) 281–300.

[Zh2] Zhang, S.: Equidistribution of small points on abelian varieties, *Ann. of Math.* **147** (1998), 159–165.