Journal of Number Theory **75**, 279–323 (1999)
Article ID jnth.1998.2336, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Minorations de formes linéaires de logarithmes pour les modules de Drinfeld

Vincent Bosser

Problèmes diophantiens, Institut de mathématiques de Jussieu, Case 247, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: bosser@math.jussieu.fr

Communicated by M. Waldschmidt

Received April 30, 1998; revised August 6, 1998

Let $k=\mathbb{F}_q(T)$, $k_\infty=\mathbb{F}_q((1/T))$, and let us denote by C the completion of an algebraic closure of k_∞ (for the $1/T$-adic valuation), and by $K\subset C$ a finite extension of k of degree D. Let $(\mathbb{G}_a, \Phi_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ be n Drinfeld modules of rank $\geqslant 1$ defined over K (with exponentials e_{Φ_i}), let $u_1, ..., u_n\in C$ be such that $e_{\Phi_i}(u_i)\in K$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, and let $\beta_0, ..., \beta_n$ be $n+1$ elements of K. We obtain in this paper a lower bound for the linear form of logarithms $\beta_0+\beta_1u_1+\cdots+\beta_nu_n$ (when it is not zero) as a function of the degree D, the heights of the points β_i, the absolute values $|u_i|$ and the heights of the $e_{\Phi_i}(u_i)$, and the heights of the modules $(\mathbb{G}_a, \Phi_i)$. © 1999 Academic Press

1. NOTATIONS ET RÉSULTATS

Le but de ce texte est d'établir une minoration pour des combinaisons linéaires de logarithmes dans le cas des modules de Drinfeld.

Dans le cas complexe, de nombreux articles ont été consacrés à de telles minorations depuis les premiers travaux de Baker, et c'est Hirata [Hir] qui en 1991 a obtenu, dans le cas général des groupes algébriques commutatifs sur $\mathbb{C}$, le meilleur résultat connu à ce jour. Des minorations dans le cas de logarithmes p-adiques ont également été obtenues (voir [Yu K, Don]). Mais aucun résultat n'existait jusqu'à présent dans le cadre des modules de Drinfeld. Nous nous proposons ici d'établir une telle minoration dans ce cadre.

On désigne par $A=\mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$, par $k=\mathbb{F}_q(T)$ son corps des fractions, par $\deg\alpha$ le degré d'un élément $\alpha\in k$ (avec la convention usuelle $\deg(0)=-\infty$), et par $|\alpha|$ sa valeur absolue, normalisée par $|\alpha|=q^{\deg\alpha}$. On note alors k_∞ le complété de k pour la valeur absolue $|\cdot|$, $\bar{k}_\infty$ une clôture algébrique de k_∞, et l'on prolonge les applications $|\cdot|$ et deg à $\bar{k}_\infty$. On note encore C le complété de $\bar{k}_\infty$ (C est algébriquement clos), $\bar{k}$ la fermeture

0022-314X/99 $30.00

algébrique de k dans C, et l'on prolonge les applications $|\cdot|$ et deg à C. Lorsque K est un sous-corps de C contenant k, on désigne par K_∞ l'adhérence de K dans C.

Nous conviendrons d'appeler T-module un couple (G, Φ), où G est un sous-groupe algébrique connexe d'un certain $\mathbb{G}_a^N$ ($\mathbb{G}_a$ groupe additif sur C et N entier $\geqslant 1$) et $\Phi: A \to \mathrm{End}(G)$ un homomorphisme injectif d'anneaux tel que pour $\lambda \in \mathbb{F}_q$, $\Phi(\lambda)$ soit la multiplication par λ. On dira que le T-module (H, Ψ) (ou plus simplement H) est un sous-T-module de (G, Φ) si H est un sous-groupe algébrique connexe de G stable sous l'action de Φ et si, pour tout $a \in A$, $\Psi(a) = \Phi(a)|_H$. L'espace tangent à l'origine d'un T-module (G, Φ) sera noté T_G. La dimension du T-module (G, Φ) est par définition la dimension du groupe algébrique G.

Nous noterons $\tau: C \to C$, $x \mapsto x^q$ le "Frobenius", et $C\{\tau\}$ l'anneau des endomorphismes $\mathbb{F}_q$-linéaires de $\mathbb{G}_a$. Alors, si $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ est un A-module de Drinfeld (c'est-à-dire un T-module de dimension un $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ tel qu'en outre, pour tout $a \in A$, la dérivée à l'origine $\partial\Phi(a)$ soit égale à a, cf. [Del-Hus]), l'homomorphisme Φ est entièrement déterminé par la donnée de $\Phi(T) \in C\{\tau\}$. Si $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ est un A-module de Drinfeld de rang $d \geqslant 0$ défini par $\Phi(T) = T\tau^0 + a_1\tau^1 + \cdots + a_d\tau^d$ ($a_d \neq 0$), on dira que $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ est défini sur le corps $K \subset C$ si tous les a_i sont dans K. On notera $e_\Phi: C \to C$ l'exponentielle de Drinfeld de $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ et $\Lambda_\Phi = \mathrm{Ker}\, e_\Phi$ son réseau des périodes.

Dans toute la suite de ce texte, on se donne $n+1$ modules de Drinfeld $(\mathbb{G}_a, \Phi_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$ ($n \geqslant 1$), où $(\mathbb{G}_a, \Phi_0)$ est le module de Drinfeld trivial (i.e., défini par $\Phi_0(T) = T\tau^0$) et pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $(\mathbb{G}_a, \Phi_i)$ est un module de Drinfeld de rang $d_i \geqslant 1$. On supposera tous les modules de Drinfeld définis sur K, extension finie de k, et on notera $D = [K : k]$. On désigne également par $G = (\mathbb{G}_a^{n+1}, \Phi) = (\mathbb{G}_a^{n+1}, \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_n)$ le T-module produit défini par l'action diagonale, et on note $\exp_G: C^{n+1} \to C^{n+1}$ son application exponentielle, définie par $\exp_G(z_0, ..., z_n) = (z_0, e_{\Phi_1}(z_1), ..., e_{\Phi_n}(z_n))$. Pour chaque entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on se fixe également, comme dans [Dav-Den], une période ω_i non nulle, de valeur absolue minimale.

Lorsque N est un entier $\geqslant 1$, on dispose sur $\mathbb{P}_N(\bar{k})$ de la hauteur logarithmique et absolue de Weil, que nous noterons h et dont nous rappelons la définition. Si $\mathbf{x} = (x_0, ..., x_N) \in \mathbb{P}_N(\bar{k})$ et si L est une extension finie de k de degré D contenant $x_0, ..., x_N$, alors

$$h(\mathbf{x}) = h(x_0, ..., x_N) = \frac{1}{D} \sum_{v \in M_L} d_v \max\{-v(x_i), 0 \leqslant i \leqslant N\},$$

où M_L désigne l'ensemble de toutes les places de L, d_v est le degré sur $\mathbb{F}_q$ du corps résiduel de L_v (complété de L en v), et où, pour v place de M_L, on a noté par la même lettre v la valuation associée normalisée par

$v(L^*)=\mathbb{Z}$ (définition indépendante du représentant choisi pour $\mathbf{x}$ et du corps L choisi). Pour $x \in \bar{k}$, on notera $h(x)$, au lieu de $h(1, x)$, la hauteur du point $(1, x) \in \mathbb{P}_1(\bar{k})$. Si l'on reprend notre T-module produit $G=(\mathbb{G}_a^{n+1}, \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_n)$, et si l'on écrit

$$\Phi_i(T)=a_{i0}\tau^0+\cdots+a_{i,d_i}\tau^{d_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

on définit la hauteur du T-module G par

$$h(G)=h(1, (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant d_i}}).$$

On remarquera que puisque $a_{i0}=T$, on a $h(G) \geqslant 1$. On posera encore $d=\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$, et si $r \in \{1, ..., n\}$, on définit $d(r)=\max\{d_{i_1}+\cdots+d_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1<\cdots<i_r \leqslant n\}$ (cette notation interviendra uniquement dans la majoration (1.7) et dans le Lemme 4.10). Enfin, on note log et $\log_q$ les logarithmes en bases e et q respectivement, et pour x réel positif, on pose $\log^+ x=\log(\max\{x, e\})$.

Ceci étant posé, le résultat principal que l'on obtient est le suivant:

THÉORÈME 1.1. *Soient $G=(\mathbb{G}_a^{n+1}, \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_n)$ un T-module produit défini comme ci-dessus sur une extension finie K de k de degré $D=[K:k]$, $\mathscr{L}(\mathbf{z})=\beta_0 z_0+\cdots+\beta_n z_n$ une forme linéaire non nulle sur C^{n+1} à coefficients dans K, W son noyau, et $u_1, ..., u_n$ des éléments non nuls de C tels que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on ait $e_{\Phi_i}(u_i) \in K$. On pose $\mathbf{u}=(1, u_1, ..., u_n) \in C^{n+1}$, $\gamma_i=e_{\Phi_i}(u_i)$, et $\delta=[K_\infty(u_1, ..., u_n) : K_\infty]$ (on verra ci-après que ce degré δ est en fait fini). On se donne encore des réels B, E, $V_1, ..., V_n$ et h vérifiant les conditions suivantes*:

$$\log B \geqslant e, \qquad \log V_1 \geqslant \cdots \geqslant \log V_n \geqslant e, \tag{1.2}$$

$$\log B \geqslant h(\beta_j), \qquad 0 \leqslant j \leqslant n, \tag{1.3}$$

$$\log V_i \geqslant \max\left\{h(\gamma_i), \frac{|u_i|^{d_i}}{D\,|\omega_i|^{d_i}}\right\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1.4}$$

$$h \geqslant h(G), \tag{1.5}$$

$$e \leqslant E \leqslant \min\left\{e(D \log V_i)^{1/d_i}\frac{|\omega_i|}{|u_i|}, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}. \tag{1.6}$$

Enfin, on pose $V=V_1=\max_{1 \leqslant i \leqslant n} V_i$. Alors:

(1) (i) *ou bien il existe un sous-T-module H de G, de dimension r, tel que $\mathbf{u} \in T_H \subset W$, et de degré dans $\mathbb{P}_{n+1}$ vérifiant*:

$$\deg H \leqslant c(Dh)^{d(r)+1}\,\delta^{d(r)+1}\Bigg(\prod_{1\leqslant i\leqslant r}\log V_i\Bigg)(\log^+\delta)^{d(r)+1}$$
$$\times(\log\log B+\log(Dh)+\log\log V)^{d(r)+1-r}(\log E)^{-r}; \qquad (1.7)$$

(ii) *ou bien on a la minoration*:

$$\begin{aligned}\deg(\mathscr{L}(\mathbf{u})) &= \log_q|\mathscr{L}(\mathbf{u})|\\ &\geqslant -c'(Dh)^{d+2}\,\delta^{d+1}(\log B)\Bigg(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\log V_i\Bigg)(\log^+\delta)^{d+2}\\ &\quad\times(\log(Dh)+\log\log V)\\ &\quad\times(\log\log B+\log(Dh)+\log\log V)^{d+1-n}\\ &\quad\times(\log E)^{-(n-1)}. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Dans chacun des cas (i) *et* (ii), *c et c' désignent des réels strictement positifs, effectivement calculables, ne dépendant que de q, n et d.*

(2) *On a pour δ la majoration suivante*:

$$\delta \leqslant q^d D^n \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\log V_i.$$

Remarques. (1) Si l'on fait abstraction du paramètre δ qui apparaît dans l'énoncé du théorème, on constate que les dépendances en $\log B$, $\log V_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, D, $\log E$, $\log\log B$, $\log\log V$, et $\log D$ correspondent exactement à celles attendues, en ce sens que l'on obtient ici les mêmes exposants que dans le cas complexe (cf. [Hir, Dav]), moyennant les conversions usuelles permettant de passer des variétés abéliennes aux modules de Drinfeld.

(2) La dépendance en la hauteur h semble par contre moins bonne que celle obtenue dans [Dav], puisqu'on obtient un exposant $d+2$ dans (1.8), alors que la minoration de [Dav] nous donne (après traduction pour passer aux modules de Drinfeld) un exposant $d+1-n$. Ceci s'explique par le fait que dans ce dernier texte les paramètres $\log B$ et $\log V_i$ dépendent de h, contrairement à ce qui est fait ici. En particulier le choix de la hauteur de Néron–Tate dans [Dav] (au lieu de la hauteur de Weil) fait que les paramètres $\log V_i$ contiennent déjà implicitement une dépendance en h. On aurait pu ici faire de même et prendre dans (1.4) la hauteur canonique $\hat{h}(\gamma_i)$ de L. Denis (voir [Den2]), l'exposant de h aurait alors été $d(r)+1-r$ dans (1.7) et $d+2-n$ dans (1.8).

(3) Le paramètre δ est le seul paramètre véritablement nouveau par rapport aux minorations de formes linéaires de logarithmes antérieures.

Si dans (1.7) et (1.8) on remplace δ par la majoration obtenue dans la partie 2 du théorème, on voit que ce paramètre δ introduit une dépendance supplémentaire importante en D et $\log V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et rend donc les estimations nettement moins bonnes que dans le cas complexe. Ce paramètre provient du lemme de Siegel utilisé au Paragraphe 6, et ne peut être supprimé par la méthode utilisée dans ce texte. Par contre, la méthode des déterminants d'interpolation, qui n'utilise pas de lemme de Siegel, donne un résultat où n'intervient pas ce paramètre δ, mais je ne suis pas parvenu à obtenir par cette méthode une minoration satisfaisante de $|\mathscr{L}(\mathbf{u})|$. Le résultat proposé ici a l'avantage de fournir un analogue parfait des minorations obtenues dans le cas complexe lorsque l'on peut prendre $\delta = 1$ (cf. par exemple le Théorème 1.9 ci-après).

Dans certains cas particuliers, le paramètre δ peut donc être pris égal à 1. On a en effet:

Théorème 1.9. *On reprend les notations et les hypothèses du Théorème* 1.1, *et on suppose en outre que l'une* (*au moins*) *des trois conditions suivantes est satisfaite*:

(i) $\beta_0 \neq 0$.

(ii) *L'ensemble* $\{\exp_G(s\mathbf{u}) \mid s \in A\}$ *est Zariski-dense dans* $\mathbb{G}_a^{n+1}$.

(iii) *Pour tout* $s \in A$ *non nul et pour tout sous-T-module H de G tel que* $T_H \subset W$, *on a* $\exp_G(s\mathbf{u}) \notin H$.

Alors $\mathscr{L}(\mathbf{u}) \neq 0$, *et on a la minoration* (1.8) *du Théorème* 1.1 *avec* $\delta = 1$ *au lieu de* $\delta = [K_\infty(u_1, ..., u_n) : K_\infty]$.

Nous démontrerons ce théorème dans les pages qui suivent en même temps que le Théorème 1.1. Signalons encore que le Théorème 1.1 permet d'obtenir immédiatement le "théorème de Baker" pour les modules de Drinfeld, théorème qui avait déjà été obtenu par L. Denis [Den4, Théorème 5] et J. Yu [Yu J3, Théorème 4.3].

Corollaire 1.10 (Théorème de Baker). *Soient* $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ *un A-module de Drinfeld de rang* $d \geqslant 1$ *défini sur* $\bar{k}$, *et* $R = \{\alpha \in C \mid \alpha\Lambda_\Phi \subset \Lambda_\Phi\}$ *l'anneau des endomorphismes de* $(\mathbb{G}_a, \Phi)$. *Soient* $u_1, ..., u_n$ *des éléments de C linéairement indépendants sur R tels que* $e_\Phi(u_i) \in \bar{k}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Alors les éléments* 1, $u_1, ..., u_n$ *sont linéairement indépendants sur* $\bar{k}$.

Démonstration. Si les éléments $1, u_1, ..., u_n$ étaient linéairement dépendants sur $\bar{k}$, il existerait une forme linéaire non nulle sur C^{n+1} à coefficients dans $\bar{k}$, soit $\mathscr{L}$, telle que $\mathscr{L}(\mathbf{u}) = 0$ (où $\mathbf{u} = (1, u_1, ..., u_n)$). En appliquant le

Théorème 1.1, il existerait donc un sous-T-module H de $G = (\mathbb{G}_a^{n+1}, \Phi_0 \times \Phi^n)$, de dimension $\leqslant n$, tel que $\mathbf{u} \in T_H$. Ce sous-T-module étant nécessairement de la forme $H = \mathbb{G}_a \times H_1$, avec H_1 sous-T-module de $(\mathbb{G}_a^n, \Phi^n)$ (voir la Proposition 2.14), on en déduirait $(u_1, ..., u_n) \in T_{H_1}$, avec T_{H_1} rationnel sur R (d'après [Thi, Théorème de l'Appendice]) et distinct de C^n. Mais ceci est en contradiction avec l'indépendance R-linéaire de $u_1, ..., u_n$. ∎

La suite de ce texte est entièrement consacrée à la démonstration des Théorèmes 1.1 et 1.9. Ces deux théorèmes se démontrant exactement de la même façon, nous les prouverons simultanément. Plus précisément, la seule différence provient des hypothèses supplémentaires (i), (ii), et (iii) du Théorème 1.9, qui ont simplement pour conséquence d'exclure le cas "périodique" qui apparaîtra au cours de la preuve au Paragraphe 5, et ce faisant, d'exclure le cas (i) du Théorème 1.1(1), et de permettre de prendre $\delta = 1$ dans la minoration (1.8). En pratique, cela se traduira par une discussion séparée uniquement au Paragraphe 3 lors des réductions (Lemme 3.1 et Proposition 3.3), et dans la preuve de la Proposition 6.10, lorsque la valeur du paramètre δ interviendra.

Pour démontrer les théorèmes nous emploierons la même méthode que dans [Hir] ou [Dav] (construction d'une fonction auxiliaire). Voici le plan de cet article. Au Paragraphe 2, on rassemble quelques propositions préliminaires utiles pour la suite, et au Paragraphe 3, on effectue quelques réductions préalables. Au Paragraphe 4, on choisit les paramètres ainsi qu'un sous-T-module privilégié $\tilde{H}$. On distingue alors deux cas, périodique et non périodique, et on définit les différentes bases de W qui interviennent (Paragraphe 5). On peut alors construire, au Paragraphe 6, la fonction auxiliaire. Les Paragraphes 7 et 8 sont consacrés respectivement à l'extrapolation et à la minoration arithmétique. Enfin, on achève la démonstration des théorèmes au Paragraphe 9.

2. QUELQUES PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES

2.1. *Croissance des fonctions exponentielles*

PROPOSITION 2.1. *Soient $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ un module de Drinfeld de rang $d \geqslant 1$, et ω une période non nulle de $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ de valeur absolue minimale. Alors on a*:

$$\forall z \in C, \qquad \deg\,(e_\Phi(z)) \leqslant \deg z + 2q^{d(\deg z - \deg \omega + 1)}.$$

Démonstration. Voir [Dav-Den, Lemme 2.3]. ∎

2.2. *Périodes*

PROPOSITION 2.2. *Soient $G=(\mathbb{G}_a, \Phi)$ un module de Drinfeld de rang $d \geqslant 1$, défini sur une extension K de k de degré D, et ω une période non nulle de G, de valeur absolue minimale. Alors on a*:

(i) $\deg \omega \leqslant Dh(G)+1$.

(ii) $\deg \omega \geqslant 1-Dh(G)$.

Démonstration. Montrons tout d'abord la première inégalité. Écrivons $\Phi(T)=a_0\tau^0+\cdots+a_d\tau^d$, et posons $x=e_\Phi(\omega/T)$. On sait que e_Φ admet le développement en produit infini suivant:

$$e_\Phi(z)=z\prod_{\substack{\lambda\in\Lambda_\Phi\\ \lambda\neq 0}}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right). \tag{2.3}$$

Il en résulte, par minimalité de $|\omega|$ et par l'inégalité ultramétrique, que $|x|=|\omega/T|=|\omega|/q$. Par ailleurs, $\Phi(T)(x)=e_\Phi(\omega)=0$, donc: $x^{q^d-1}=-a_d^{-1}(a_0+a_1x^{q-1}+\cdots+a_{d-1}x^{q^{d-1}-1})$. On en déduit, si $\deg x\geqslant 0$:

$$(q^d-1)\deg x\leqslant -\deg a_d+\max_{0\leqslant i\leqslant d-1}\{\deg a_i\}+(q^{d-1}-1)\deg x,$$

d'où

$$\begin{aligned}\deg x &\leqslant -\deg a_d+\max_{0\leqslant i\leqslant d}\{0, \deg a_i\}\\ &\leqslant \sum_{v\in M_K} d_v v(a_d)+\sum_{v\in M_K} d_v \max\{0, -v(a_i), 0\leqslant i\leqslant d\},\end{aligned}$$

et donc $\deg x\leqslant Dh(G)$ car $\sum_{v\in M_K} d_v v(a_d)=0$. Cette dernière inégalité étant clairement vraie si $\deg x\leqslant 0$, on en déduit la première inégalité de la proposition, puisque $|\omega|=q\,|x|$.

La seconde inégalité se montre de la même façon, à partir cette fois de l'égalité $x=-a_0^{-1}(a_1x^q+\cdots+a_dx^{q^d})$. ∎

2.3. *Dérivations*

Introduisons tout d'abord quelques notations. Soient $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m)$ $(m\geqslant 1)$ une famille libre de C^n, $\mathscr{V}$ le sous-espace vectoriel de C^n qu'elle engendre, f: $C^n\to C$ une fonction entière, et $\mathbf{a}$ un point de C^n. Alors les dérivées divisées $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}}f(\mathbf{a})$ sont définies, pour tout m-uple $\mathbf{j}=(j_1, ..., j_m)\in\mathbb{N}^m$, par la relation:

$$\forall \mathbf{h}=h_1\mathbf{e}_1+\cdots+h_m\mathbf{e}_m\in\mathscr{V},\qquad f(\mathbf{a}+\mathbf{h})=\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^m} D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}}f(\mathbf{a})\,h_1^{j_1}\cdots h_m^{j_m}.$$

Lorsque $m=n=1$ et $\mathbf{e}_1=1$ (fonctions d'une seule variable), on notera plus simplement $\partial^j f$ au lieu de $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} f$, et ∂f ou f' lorsque $j=1$. Si $\mathbf{j}=(j_1, ..., j_m) \in \mathbb{N}^m$ est un m-uplet d'entiers, on notera encore $\|\mathbf{j}\| = j_1 + \cdots + j_m$. Enfin, pour tout couple $(\mathbf{j}, \mathbf{j}')$ de $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^m$, on posera

$$\binom{\mathbf{j}+\mathbf{j}'}{\mathbf{j}} = \binom{j_1+j'_1}{j_1} \cdots \binom{j_m+j'_m}{j_m}.$$

Les propriétés principales des dérivées divisées que nous utiliserons sont résumées dans le lemme suivant:

Lemme 2.4. *Soient $f\colon C^n \to C$ une fonction entière, $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m)$ une famille libre de C^n $(m \geqslant 1)$, et $\mathscr{V}$ le sous-espace vectoriel de C^n qu'elle engendre. Alors*:

(i) *Pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^m$, l'application $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} f\colon C^n \to C$ est entière.*

(ii) *Si $\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$ est un vecteur non nul de $\mathscr{V}$, on a, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $\mathbf{a} \in C^n$,*

$$D_{\mathbf{v}}^{\ell} f(\mathbf{a}) = \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^m \\ \|\mathbf{j}\| = \ell}} v_1^{j_1} \cdots v_m^{j_m} D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} f(\mathbf{a}).$$

(iii) *Pour tout $(\mathbf{j}, \mathbf{j}') \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^m$, on a*:

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}}(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}'} f) = D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}'}(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} f) = \binom{\mathbf{j}+\mathbf{j}'}{\mathbf{j}} D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}+\mathbf{j}'} f.$$

(iv) *Si $f_1, f_2\colon C^n \to C$ sont deux fonctions entières et $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^m$, on a*:

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}}(f_1 f_2) = \sum_{\substack{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2 \in \mathbb{N}^m \\ \mathbf{j}_1+\mathbf{j}_2=\mathbf{j}}} (D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}_1} f_1)(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}_2} f_2).$$

(v) *Soient $\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$ un point de $\mathscr{V}$, et $g\colon C \to C$ la fonction définie par $g(z)=f(z\mathbf{v})$. Alors, pour tout entier $\ell \geqslant 0$, on a*:

$$\partial^{\ell} g(z) = \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^m \\ \|\mathbf{j}\| = \ell}} D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} f(z\mathbf{v})\, v_1^{j_1} \cdots v_m^{j_m}.$$

Démonstration. Elle est facile et laissée au lecteur, résultant immédiatement des définitions et de l'unicité du développement en série entière. ∎

Le lemme qui suit est un analogue du Lemme 3.1 de [Phi-Wal] et du Lemme 3.2 de [Hir]. La partie (1) nous permettra de contrôler les dérivées en un point $\mathbf{v}$ après changement de base et nous sera utile à plusieurs reprises. La partie (2) est un raffinement de (1) dans un cas particulier et nous servira à établir la Proposition 2.7.

LEMME 2.5. *Soient* $\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1, ..., \boldsymbol{\varepsilon}_\ell)$ *et* $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m)$ $(\ell, m\geqslant 1)$ *deux familles libres de* C^n *telles qu'il existe des éléments* e_{ij} *de* C, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant \ell$, *vérifiant*

$$\mathbf{e}_i=\sum_{1\leqslant j\leqslant \ell} e_{ij}\,\boldsymbol{\varepsilon}_j \qquad (1\leqslant i\leqslant m).$$

Soient encore $\mathbf{v}\in C^n$ *et* $f\colon C^n\to C$ *une fonction entière.*

(1) *On pose* $\Theta=\max_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant \ell}\{|e_{ij}|\}$. *Alors, pour tout entier* $M\geqslant 0$, *on a*:

$$\max_{\substack{\mathbf{t}\in\mathbb{N}^m\\ \|\mathbf{t}\|=M}}\{|D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}f(\mathbf{v})|\}\leqslant \Theta^M \max_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{N}^\ell\\ \|\boldsymbol{\tau}\|=M}}\{|D_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{\tau}}f(\mathbf{v})|\}.$$

(2) *On suppose en outre que* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *est la base canonique de* C^n *et que la fonction* f *est polynomiale en la première variable, de degré* $\leqslant L$ (L *entier* $\geqslant 0$). *On pose*

$$\Theta_1=\max\{1, \max_{1\leqslant i\leqslant m}|e_{i1}|\} \qquad et \qquad \Theta_2=\max\{1, \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 2\leqslant j\leqslant n}}|e_{ij}|\}$$

(*on convient que* $\Theta_2=1$ *si* $n=1$). *Alors, pour tout entier* $M\geqslant 0$, *on a*:

$$\max_{\substack{\mathbf{t}\in\mathbb{N}^m\\ \|\mathbf{t}\|=M}}\{|D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}f(\mathbf{v})|\}\leqslant \Theta_1^{\min\{L, M\}}\,\Theta_2^M \max_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{N}^n\\ \|\boldsymbol{\tau}\|=M}}\{|D_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{\tau}}f(\mathbf{v})|\}.$$

Démonstration. Montrons d'abord (1). Soient $M\geqslant 0$ et $\mathbf{t}\in\mathbb{N}^m$ tels que $\|\mathbf{t}\|=M$. Il résulte du lemme précédent 2.4 (iii) et (ii) que l'on a:

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}f(\mathbf{v})&=D_{\mathbf{e}_1}^{t_1}\circ\cdots\circ D_{\mathbf{e}_m}^{t_m}f(\mathbf{v})=\Bigg(\prod_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{\substack{\mathbf{k}_i\in\mathbb{N}^\ell\\ \|\mathbf{k}_i\|=t_i}}\mathbf{e}_i^{\mathbf{k}_i}D_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{k}_i}\Bigg)f(\mathbf{v})\\ &=\sum_{\substack{\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m\\ \|\mathbf{k}_1\|=t_1\\ \vdots\\ \|\mathbf{k}_m\|=t_m}}\mathbf{e}_1^{\mathbf{k}_1}\cdots\mathbf{e}_m^{\mathbf{k}_m}D_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{k}_1}\circ\cdots\circ D_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{k}_m}f(\mathbf{v}),\end{aligned} \tag{2.6}$$

où on a noté $\mathbf{e}_i^{\mathbf{k}_i}=e_{i1}^{k_{i1}}\cdots e_{i\ell}^{k_{i\ell}}$ lorsque $\mathbf{k}_i=(k_{i1}, ..., k_{i\ell})$. On en déduit facilement la partie (1) du lemme par l'inégalité ultramétrique et le Lemme 2.4(iii). Pour montrer (2) on repart de l'égalité (2.6). Comme f est polynomiale en la première variable de degré $\leqslant L$, un terme de la somme

(2.6) sera nul dès que l'on dérive plus de L fois par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, c'est-à-dire dès que $k_{11}+\cdots+k_{m1}>L$. Dans le cas contraire, on aura:

$$|\mathbf{e}_1^{\mathbf{k}_1}\cdots\mathbf{e}_m^{\mathbf{k}_m}|=\prod_{1\leqslant i\leqslant m}|e_{i1}^{k_{i1}}|\cdot\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\2\leqslant j\leqslant n}}|e_{ij}^{k_{ij}}|\leqslant\Theta_1^{\min\{L,M\}}\Theta_2^M,$$

d'où la partie (2) du lemme. ∎

Dans la proposition qui suit, on reprend les hypothèses et notations du Paragraphe 1.

Proposition 2.7. *Soient* $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_m)$ *une famille libre de* C^{n+1}, *et* $P\in C[X_0,...,X_n]$ *un polynôme vérifiant* $\deg_{X_i}P\leqslant L_i$ *pour tout* $0\leqslant i\leqslant n$ (L_i *entiers* $\geqslant 0$), *et dont les coefficients sont de degré* $\leqslant X$, $X\in\mathbb{R}$. *On écrit* $\mathbf{e}_j=(e_{j0},...,e_{jn})$ *pour* $1\leqslant j\leqslant m$, *et on pose*

$$\Theta_0=\max\{1,\max_{1\leqslant j\leqslant m}|e_{j0}|\},\qquad\Theta_1=\max\{1,\max_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\1\leqslant i\leqslant n}}|e_{ji}|\}.$$

Alors, pour tout $\mathbf{v}=(v_0,...,v_n)\in C^{n+1}$ *et tout m-uple* $\mathbf{j}\in\mathbb{N}^m$, *on a, en notant* $F=P\circ\exp_G$ *et* $h=h(G)$:

$$\begin{aligned}\deg(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}}F(\mathbf{v}))\leqslant{}&L_0\log_q\Theta_0+\|\mathbf{j}\|\log_q\Theta_1+\|\mathbf{j}\|\,Dh+X\\&+2q^d\sum_{1\leqslant i\leqslant n}L_i\max\left\{1,\left|\frac{v_i}{\omega_i}\right|^{d_i}\right\}+L_0\max\{0,\log_q|v_0|\}\\&+\sum_{1\leqslant i\leqslant n}L_i\max\left\{Dh,\log_q\left|\frac{v_i}{\omega_i}\right|\right\}+2Dh\sum_{1\leqslant i\leqslant n}L_i.\end{aligned}$$

Démonstration. D'après le Lemme 2.5(2), on a, en notant $\boldsymbol{\varepsilon}$ la base canonique de C^{n+1}:

$$\deg(D_{\mathbf{e}}^{j}F(\mathbf{v}))\leqslant L_0\log_q\Theta_0+\|\mathbf{j}\|\log_q\Theta_1+\max_{\substack{\mathbf{t}\in\mathbb{N}^{n+1}\\\|\mathbf{t}\|=\|\mathbf{j}\|}}\{\deg(D_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{t}}F(\mathbf{v}))\}.\tag{2.8}$$

Afin de majorer $\deg(D_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{t}}F(\mathbf{v}))$ pour $\mathbf{t}\in\mathbb{N}^{n+1}$ vérifiant $\|\mathbf{t}\|=\|\mathbf{j}\|$, on applique les inégalités de Cauchy dans le "polydisque" $\mathscr{D}=\{\mathbf{z}=(z_0,...,z_n)\in C^{n+1}\mid\deg z_0\leqslant 0\ \text{ et }\ \deg z_i\leqslant\deg\omega_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ à la fonction entière f: $C^{n+1}\to C$ définie par $f(\mathbf{z})=F(\mathbf{z}+\mathbf{v})$. On obtient:

$$\begin{aligned}\deg(D_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{t}}F(\mathbf{v}))&=\deg(D_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{t}}f(0))\\&\leqslant\sup\{\deg(f(\mathbf{z}))\mid\mathbf{z}\in\mathscr{D}\}-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}t_i\deg\omega_i.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Écrivons F sous la forme $F(\mathbf{z})=\sum_\lambda p_\lambda z_0^{\lambda_0} e_{\Phi_1}(z_1)^{\lambda_1}\cdots e_{\Phi_n}(z_n)^{\lambda_n}$. On voit aisément que l'on a, par l'inégalité ultramétrique et la Proposition 2.1:

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{z}\in\mathscr{D},\quad \deg\,(f(\mathbf{z})) &\leqslant X+L_0\max\{0,\deg\,(z_0+v_0)\}\\ &\quad+\sum_{1\leqslant i\leqslant n} L_i\max\{0,\deg\,(z_i+v_i)\}\\ &\quad+2q^d\sum_{1\leqslant i\leqslant n} L_i q^{d_i(\deg\,(z_i+v_i)-\deg\,\omega_i)}\\ &\leqslant X+L_0\max\{0,\deg\,v_0\}\\ &\quad+\sum_{1\leqslant i\leqslant n} L_i\max\{-\deg\,\omega_i,0,\deg\,(v_i/\omega_i)\}\\ &\quad+\sum_{1\leqslant i\leqslant n} L_i\deg\,\omega_i+2q^d\sum_{1\leqslant i\leqslant n} L_i q^{d_i\max\{0,\deg\,(v_i/\omega_i)\}}.\end{aligned}$$

En utilisant alors les majorations $-\deg\,\omega_i\leqslant Dh$ et $\deg\,\omega_i\leqslant 2Dh$ (résultant de la Proposition 2.2), et en revenant aux inégalités (2.8) et (2.9), on obtient la proposition. ▮

2.4. *Un Lemme d'interpolation*

Le but de ce paragraphe est d'établir la Proposition 2.13, que nous utiliserons au Paragraphe 7 lors de l'extrapolation.

Lorsque $f\colon C\to C$ est une fonction entière et r un réel, on note $M(f,r)=\sup\{\deg\,(f(z))\mid \deg z\leqslant r\}$. On a alors le lemme suivant:

Lemme 2.10. *Soient $R\geqslant 0$ un réel, et S_1, M_1 deux entiers vérifiant $0\leqslant S_1\leqslant R$ et $M_1\geqslant 1$. Soient $b_{s\ell}$ ($s\in A$, $\deg s\leqslant S_1$ et $\ell\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\ell<M_1$) des éléments de C, et soit $\Upsilon\in\mathbb{R}$ tel que $\max\{\deg b_{s\ell}\mid\deg s\leqslant S_1,\ 0\leqslant\ell<M_1\}\leqslant\Upsilon$. On note encore P le polynôme d'interpolation d'Hermite tel que $\partial^\ell P(s)=b_{s\ell}(\deg s\leqslant S_1,\ 0\leqslant\ell<M_1)$. Alors on a:*

$$M(P,R)\leqslant\Upsilon+(R-S_1+1)\,M_1q^{S_1+1}.$$

Démonstration. Appelons $x_1,...,x_m$ les éléments de l'ensemble $\{s\in A\mid\deg s\leqslant S_1\}$ (on a donc $m=q^{S_1+1}$), et notons, pour i, ℓ tels que $1\leqslant i\leqslant m$ et $0\leqslant\ell<M_1$, $c_{i\ell}=b_{x_i\ell}$. Alors le polynôme d'interpolation d'Hermite P est donné par

$$P(x)=\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\ \sum_{0\leqslant\ell<M_1} c_{i\ell}\,p_{i\ell}(x),$$

où

$$p_{i\ell}(x) = (x - x_i)^\ell \, q_i(x) - \sum_{\ell < j < M_1} \partial^{j-\ell} q_i(x_i) \, p_{ij}(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant \ell < M_1)$$

et

$$q_i(x) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq i}} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)^{M_1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

On vérifie facilement que pour tout $j \geqslant 0$ et tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $\deg(\partial^j q_i(x_i)) \leqslant 0$. Par récurrence descendante sur ℓ, on déduit de là l'inégalité suivante, valable pour tout $x \in C$ tel que $\deg x \leqslant R$:

$$\deg(p_{i\ell}(x)) \leqslant (M_1 - 1) R + \deg(q_i(x)) \qquad (1 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant \ell < M_1). \quad (2.11)$$

Majorons maintenant $\deg(q_i(x))$ pour $\deg x \leqslant R$ et $1 \leqslant i \leqslant m$. On a:

$$\begin{aligned} \deg(q_i(x)) &= M_1 \sum_{j \neq i} \deg(x - x_j) - M_1 \sum_{j \neq i} \deg(x_i - x_j) \\ &\leqslant M_1 R(m-1) - M_1 \sum_{\substack{s \in A, \, s \neq x_i \\ \deg s \leqslant S_1}} \deg(s - x_i). \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{\substack{s \in A, \, s \neq x_i \\ \deg s \leqslant S_1}} \deg(s - x_i) = \sum_{\substack{s \in A, \, s \neq 0 \\ \deg s \leqslant S_1}} \deg s = S_1 q^{S_1 + 1} - \frac{q^{S_1+1} - q}{q - 1},$$

d'où:

$$\deg(q_i(x)) \leqslant M_1 q^{S_1+1}(R - S_1 + 1) - M_1 R. \qquad (2.12)$$

En revenant alors à l'expression de P et en utilisant (2.11) et (2.12), on obtient le lemme. ∎

Nous pouvons maintenant établir la Proposition 2.13. Cette proposition est une variante du Lemme 2.4 de [Dav-Den] et constitue un analogue en caractéristique positive du Lemme d'interpolation 3.5 de [Hir].

Proposition 2.13. *Soient $f: C \to C$ une fonction entière, S et R deux réels tels que $0 \leqslant S \leqslant R$, et S_1 et M_1 deux entiers vérifiant $0 \leqslant S_1 \leqslant S$ et*

$M_1 \geqslant 1$. *Soit encore* $\Upsilon \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $s \in A$ *vérifiant* $\deg s \leqslant S_1$ *et tout* $\ell \in \mathbb{N}$ *vérifiant* $0 \leqslant \ell < M_1$, *on ait*

$$\deg(\partial^\ell f(s)) \leqslant \Upsilon.$$

Alors on a:

$$M(f, S) \leqslant \max\{-(R-S)\, M_1 q^{S_1+1} + M(f, R), \Upsilon + (S - S_1 + 1)\, M_1 q^{S_1+1}\}.$$

Démonstration. Soit P le polynôme d'interpolation d'Hermite vérifiant $\partial^\ell P(s) = \partial^\ell f(s)$ pour tout $s \in A$ tel que $\deg s \leqslant S_1$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant \ell < M_1$. La fonction entière $g = f - P$ a au moins $M_1 q^{S_1+1}$ zéros (comptés avec multiplicités) dans le disque $\{z \in C \mid \deg z \leqslant S\}$. Donc, par le Lemme de Schwarz [Yu J1, Lemme 2.3]:

$$M(g, S) \leqslant M(g, R) - (R-S)\, M_1 q^{S_1+1}.$$

On en déduit, par l'inégalité ultramétrique:

$$\begin{aligned} M(f, S) &\leqslant \max\{M(P, S), M(g, S)\} \\ &\leqslant \max\{M(P, S), M(g, R) - (R-S)\, M_1 q^{S_1+1}\} \\ &\leqslant \max\{M(P, S), M(f, R) - (R-S)\, M_1 q^{S_1+1}, \\ &\qquad M(P, R) - (R-S)\, M_1 q^{S_1+1}\}. \end{aligned}$$

En utilisant alors le Lemme 2.10 pour majorer $M(P, S)$ et $M(P, R)$, on obtient immédiatement la proposition. ∎

2.5. *Sous-T-modules d'un T-module produit*

Voici un résultat dû à L. Denis, décrivant les sous-T-modules d'un T-module produit.

PROPOSITION 2.14. *Soient* $n_1, ..., n_s$ *s entiers* $\geqslant 1$, *et pour* i, $1 \leqslant i \leqslant s$, *soit* $G_i = (\mathbb{G}_a^{n_i}, \Psi_i) = (\mathbb{G}_a^{n_i}, \Psi_{i1} \times \cdots \times \Psi_{i, n_i})$ *un T-module, produit de* n_i *modules de Drinfeld* $(\mathbb{G}_a, \Psi_{ij})$ $(1 \leqslant j \leqslant n_i)$ *deux à deux isogènes. On suppose que* $(\mathbb{G}_a, \Psi_{ij})$ *n'est pas isogène à* $(\mathbb{G}_a, \Psi_{kl})$ *si* $i \neq k$. *Alors tout sous-T-module H du T-module produit* $(G_1 \times \cdots \times G_s, \Psi_1 \times \cdots \times \Psi_s)$ *est de la forme* $H = H_1 \times \cdots \times H_s$, *où* H_i *est un sous-T-module de* G_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$.

Démonstration. Voir [Den 3, Lemme 1]. ∎

2.6. *Fonctions de Hilbert–Samuel et degrés*

Nous rappelons dans ce paragraphe, pour la commodité du lecteur, quelques résultats plus ou moins classiques sur la fonction de Hilbert–Samuel d'une variété multiprojective. Les détails se trouvent essentiellement dans [Phi].

Si $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{n_s}$ est un espace multiprojectif et H une sous-variété de $\mathbb{P}$, nous noterons, comme dans [Phi], $\mathscr{H}(H; L_1, ..., L_s)$ la valeur en $(L_1, ..., L_s)$ de la partie homogène de plus haut degré du polynôme de Hilbert–Samuel de H, multipliée par $(\dim H)!$. Alors $\mathscr{H}(H; L_1, ..., L_s)$ est un polynôme (homogène) en $L_1, ..., L_s$ de degré $\dim H$, et combinaison linéaire à coefficients entiers $\geqslant 0$ des monômes $L_1^{\alpha_1} \cdots L_s^{\alpha_s}$, où $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ et $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = \dim H$.

Si maintenant n est un entier $\geqslant 0$ et H une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_a^{n+1}$, on définit $\mathscr{H}(H; L_0, ..., L_n)$ comme suit: on plonge de façon naturelle $\mathbb{G}_a$ dans $\mathbb{P}_1$, d'où un plongement $\varphi: \mathbb{G}_a^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_1 = (\mathbb{P}_1)^{n+1}$, et l'on pose $\mathscr{H}(H; L_0, ..., L_n) = \mathscr{H}(\varphi(H); L_0, ..., L_n)$. Dans le cas où H est de la forme $H = (0) \times H'$, H' sous-variété de $\mathbb{G}_a^n$, alors $\mathscr{H}(H; L_0, ..., L_n)$ ne dépend pas de L_0, mais seulement de $L_1, ..., L_n$. Plus généralement, lorsque H est de la forme $H = H_0 \times \cdots \times H_s$, avec $H_i \subset \mathbb{G}_a^{n_i} \hookrightarrow (\mathbb{P}_1)^{n_i}$, on a la relation suivante, pour tout $(L_0, ..., L_s) \in \mathbb{N}^{s+1}$:

$$\mathscr{H}(H; L_0, ..., L_0, ..., L_s, ..., L_s) = \frac{(\dim H)!}{(\dim H_0)! \cdots (\dim H_s)!} \prod_{0 \leqslant i \leqslant s} \mathscr{H}(H_i; L_i, ..., L_i) \qquad (2.15)$$

(dans chaque membre de (2.15), L_i figure n_i fois $(0 \leqslant i \leqslant s)$). Cette relation résulte facilement du Lemme 3.4 de [Phi].

Mentionnons enfin le résultat suivant.

Proposition 2.16. *Soient $m \geqslant 1$ un entier et H une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_a^m$. On plonge naturellement $\mathbb{G}_a^m$ dans $\mathbb{P}_m$ et l'on note* $\deg H$ *le degré de H dans $\mathbb{P}_m$. Alors on a*:

$$\deg H \leqslant \mathscr{H}(H; 1, ..., 1) \leqslant m^{\dim H} \deg H.$$

Démonstration. Notons φ_1 le plongement naturel $\mathbb{G}_a^m \hookrightarrow \mathbb{P}_m$, et φ_2 le composé du plongement $\mathbb{G}_a^m \hookrightarrow (\mathbb{P}_1)^m$ avec le plongement de Segre $(\mathbb{P}_1)^m \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ $(N = 2^m - 1)$. En notant $H_1 = \varphi_1(H)$ et $H_2 = \varphi_2(H)$, on obtient un isomorphisme de variétés quasi-projectives $H_1 \simeq H_2$, et la Proposition 2 de [Ber-Phi] fournit alors les inégalités

$$\deg H_1 \leqslant \deg H_2 \leqslant m^{\dim H_1} \deg H_1$$

(où $\deg H_1$ est le degré de H_1 dans $\mathbb{P}_m$ et $\deg H_2$ celui de H_2 dans $\mathbb{P}_N$). On obtient donc bien la proposition puisque $\deg H_1 = \deg H$ et $\deg H_2 = \mathscr{H}(H; 1, ..., 1)$. ▮

2.7. *Distance d'une période à l'espace tangent d'un sous-T-module*

Il s'agit de démontrer dans ce paragraphe la Proposition 2.17. Pour $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ dans C^{n+1}, on pose $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |v_i - v_i'|$. On a alors:

PROPOSITION 2.17. *On reprend les hypothèses et notations du Théorème* 1.1. *Soient H un sous-T-module de G et $\boldsymbol{\eta} \in C^{n+1}$ une période de G telle que $\boldsymbol{\eta} \notin T_H$. Alors on a*:

$$d(\boldsymbol{\eta}, T_H) \geqslant \frac{1}{c_2 q^{Dh} (Dh)^{c_1} \mathscr{H}(H; 1, ..., 1)},$$

où c_1 et c_2 sont des réels strictement positifs ne dépendant que de q, n et d.

La preuve de cette proposition va être une conséquence facile du lemme suivant dû à S. David et L. Denis.

LEMME 2.18. *Soient $(\mathbb{G}_a, \Phi_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n modules de Drinfeld de rang $d \geqslant 1$ isogènes à $(\mathbb{G}_a, \Phi)$, soit $G = (\mathbb{G}_a^n, \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n)$ le T-module produit, H un sous-T-module de G, et $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_n)$ une période de G telle que $\boldsymbol{\eta} \notin T_H$. Pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on se fixe une période non nulle ω_i de $(\mathbb{G}_a, \Phi_i)$, minimale pour la valeur absolue, et l'on définit*

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{\eta}, T_H) = \inf_{\mathbf{x} \in T_H} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \frac{x_i - \eta_i}{\omega_i} \right|.$$

On se fixe encore une isogénie $f_i: (\mathbb{G}_a, \Phi_i) \to (\mathbb{G}_a, \Phi)$ pour tout i. Alors on a:

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{\eta}, T_H) \geqslant \frac{1}{(\deg H)^{1/d} (\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\deg f_i\})^{n+1}},$$

où $\deg H$ *est le degré de H dans le plongement naturel $\mathbb{G}_a^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$.*

Démonstration. Voir [Dav-Den, Lemme 2.23]. ▮

Démonstration de la Proposition 2.17. Quitte à modifier l'ordre des facteurs, on peut regrouper dans G les modules de Drinfeld isogènes et écrire notre T-module G sous la forme:

$$G = (\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{G}_a^{n_s}, \Phi_0 \times \Psi_1 \times \cdots \times \Psi_s),$$

où $(\mathbb{G}_a, \Phi_0)$ est le module de Drinfeld trivial et, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant s$, $(\mathbb{G}_a^{n_i}, \Psi_i)$ est un T-module produit de n_i modules de Drinfeld $(\mathbb{G}_a, \Psi_{ij})$,

$1 \leqslant j \leqslant n_i$, les modules $(\mathbb{G}_a, \Psi_{ij})$ et $(\mathbb{G}_a, \Psi_{kl})$ étant non isogènes si $i \neq k$. D'après la Proposition 2.14, le sous-T-module H est donc de la forme $H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_s$, et l'espace tangent à l'origine T_H de la forme $T_H = T_{H_0} \times \cdots \times T_{H_s}$. Alors, en écrivant $\boldsymbol{\eta} = (0, \boldsymbol{\eta}_1, ..., \boldsymbol{\eta}_s)$, on a $d(\boldsymbol{\eta}, T_H) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \{d(\boldsymbol{\eta}_i, T_{H_i})\}$. Soit maintenant i, $1 \leqslant i \leqslant s$, tel que $\boldsymbol{\eta}_i \notin T_{H_i}$. Pour chaque entier j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant n_i$, notons $f_{ij}: (\mathbb{G}_a, \Psi_{ij}) \to (\mathbb{G}_a, \Psi_{i1})$ une isogénie définie sur $\bar{k}$ (on remarquera que puisque les modules de Drinfeld sont définis sur $\bar{k}$, une telle isogénie existe: la démonstration est identique à celle donnée pour les courbes elliptiques dans [Mas-Wüs, Lemme 6.1]). Appliquant le Théorème 1.3 de [Dav-Den], on voit que l'on peut trouver f_{ij} de sorte que l'on ait $\deg(f_{ij}) \leqslant c_2'(Dh)^{c_1'}$, où c_1' et c_2' ne dépendent que de q et d. En utilisant alors le Lemme 2.18 et la minoration $|\omega_i| \geqslant q^{-Dh}$ (cf. Proposition 2.2), il vient:

$$d(\boldsymbol{\eta}_i, T_{H_i}) \geqslant \frac{1}{q^{Dh}} \operatorname{dist}(\boldsymbol{\eta}_i, T_{H_i}) \geqslant \frac{1}{c_2(\deg H_i)\, q^{Dh}(Dh)^{c_1}},$$

où $c_1 = c_1(q, n, d)$, $c_2 = c_2(q, n, d)$, et où $\deg H_i$ désigne ici le degré de l'adhérence de Zariski de H_i dans le plongement naturel de $\mathbb{G}_a^{n_i}$ dans $\mathbb{P}_{n_i}$. Il suffit maintenant de remarquer qu'en vertu de la Proposition 2.16 et de la relation (2.15), on a $\deg H_i \leqslant \mathscr{H}(H_i; 1, ..., 1) \leqslant \mathscr{H}(H; 1, ..., 1)$, ce qui achève la démonstration. ∎

2.8. *Majoration du paramètre E*

Nous terminons ce Paragraphe 2 par la majoration suivante, qui nous sera utile à plusieurs reprises.

PROPOSITION 2.19. *On reprend les hypothèses et notations du Théorème* 1.1. *Alors, si l'on note* $V_0 = \min\{V_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, *on a*:

$$\log_q E \leqslant 5Dh \log V_0.$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, ..., n\}$, et supposons tout d'abord $|u_i| < |\omega_i|$. La période ω_i étant minimale pour la valeur absolue, il résulte du développement en produit infini (2.3) de e_{Φ_i} et de l'inégalité ultramétrique que l'on a $|e_{\Phi_i}(u_i)| = |u_i|$. D'où $\deg u_i = \deg \gamma_i \geqslant -Dh(\gamma_i) \geqslant -D \log V_i$, et donc, d'après la Proposition 2.2(i) et en utilisant la majoration $\log_q (D \log V_i) \leqslant (D \log V_i - 1)/\log q$:

$$\frac{1}{\log q} + \frac{1}{d_i} \log_q (D \log V_i) + \deg \omega_i - \deg u_i \leqslant Dh + \left(1 + \frac{1}{\log q}\right) D \log V_i + 1$$

$$\leqslant 3D \log V_i + 2Dh \leqslant 5Dh \log V_i.$$

Si maintenant $|u_i| \geqslant |\omega_i|$, on a encore:

$$\frac{1}{\log q}+\frac{1}{d_i}\log_q(D\log V_i)+\deg\omega_i-\deg u_i \leqslant \frac{1}{\log q}+\log_q(D\log V_i)$$
$$\leqslant 2D\log V_i \leqslant 5Dh\log V_i.$$

Ceci étant vrai pour tout i, on obtient bien l'inégalité annoncée. ▮

3. RÉDUCTIONS DU PROBLÈME

Commençons par la remarque suivante.

LEMME 3.1. *Dans l'énoncé du Théorème* 1.9, *chacune des conditions* (*i*) *ou* (*ii*) *implique la condition* (*iii*). *En conséquence, il suffit d'établir ce théorème sous l'hypothèse* (*iii*).

Démonstration. Montrons tout d'abord que (i) implique (iii), et supposons donc $\beta_0 \neq 0$. Soit $s \in A$ non nul, et $H \subset G$ un sous-T-module tel que $T_H \subset W$. D'après la Proposition 2.14, H est de la forme $H=(0)\times H_1$ ou $H=\mathbb{G}_a \times H_1$, avec H_1 sous-T-module de $(\mathbb{G}_a^n, \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n)$. On ne peut avoir $H=\mathbb{G}_a\times H_1$, car sinon la droite vectorielle de C^{n+1} engendrée par $(1, 0, ..., 0)$ serait contenue dans T_H, donc dans W, ce qui est exclu puisque $\beta_0 \neq 0$. Il en résulte $H=(0)\times H_1$, et comme $\exp_G(s\mathbf{u})=(s, e_{\Phi_1}(su_1), ..., e_{\Phi_n}(su_n))$, on a bien $\exp_G(s\mathbf{u}) \notin H$.

Pour prouver que (ii) entraîne (iii), on démontre la contraposée. Soient donc s_0 un élément non nul de A et H un sous-T-module de G tels que $T_H \subset W$ et $\exp_G(s_0\mathbf{u}) \in H$. Désignons par $r_1, ..., r_m$ les éléments de l'ensemble $\{r \in A \mid \deg r < \deg s_0\}$. Si $s \in A$, une division euclidienne montre que l'on peut écrire $s=as_0+r_i$, avec $a \in A$ et $i \in \{1, ..., m\}$, d'où $\exp_G(s\mathbf{u}) \in H+\exp_G(r_i\mathbf{u})$. Ainsi, on a:

$$\{\exp_G(s\mathbf{u}) \mid s \in A\} \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant m} (H+\exp_G(r_i\mathbf{u})).$$

Comme $\dim H \leqslant n$, on en déduit que l'ensemble $\{\exp_G(s\mathbf{u}) \mid s\in A\}$ n'est pas Zariski-dense dans $\mathbb{G}_a^{n+1}$. Ceci achève la démonstration du lemme. ▮

Dans toute la suite, quand on parlera du Théorème 1.9, il sera sous-entendu que l'on se place sous l'hypothèse (iii) de ce théorème.

Nous allons maintenant établir la majoration du degré δ figurant dans la conclusion du Théorème 1.1.

PROPOSITION 3.2. *Avec les notations du Théorème* 1.1, *on a la majoration*:

$$\delta \leqslant q^d D^n \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \log V_i.$$

Démonstration. Fixons i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et définissons l'entier $m_i \geqslant 1$ par

$$q^{d_i(m_i-1)} \leqslant D \log V_i < q^{d_i m_i}.$$

Posons alors $x_i = e_{\Phi_i}(u_i/T^{m_i})$. On a $\Phi_i(T^{m_i})(x_i) = \Phi_i(T^{m_i})(e_{\Phi_i}(u_i/T^{m_i})) = e_{\Phi_i}(u_i) = \gamma_i$, avec $\gamma_i \in K$ et $\Phi_i(T^{m_i})$ polynôme de degré $q^{d_i m_i}$. On en déduit que x_i est algébrique sur K_∞, avec $[K_\infty(x_i) : K_\infty] \leqslant q^{d_i m_i} \leqslant q^{d_i} D \log V_i$. Par ailleurs, de la condition (1.4) sur $\log V_i$, on tire $|u_i|^{d_i} < |\omega_i|^{d_i} q^{d_i m_i}$, d'où $|u_i/T^{m_i}| < |\omega_i|$. Il en résulte que x_i est dans le disque de convergence du logarithme $\log_{\Phi_i}$ attaché à $(\mathbb{G}_a, \Phi_i)$, et comme les coefficients du développement en série entière de $\log_{\Phi_i}$ sont dans K et que les extensions finies de K_∞ sont complètes, on obtient $u_i/T^{m_i} = \log_{\phi_i}(x_i) \in K_\infty(x_i)$, d'où $u_i \in K_\infty(x_i)$. Ainsi, on a $[K_\infty(u_i) : K_\infty] \leqslant [K_\infty(x_i) : K_\infty] \leqslant q^{d_i} D \log V_i$, et donc $[K_\infty(u_1, ..., u_n) : K_\infty] \leqslant q^d D^n \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \log V_i$. ∎

La proposition suivante, due essentiellement à N. Hirata [Hir, Lemme 4.1], permet de réduire de façon cruciale le problème.

PROPOSITION 3.3. *Avec les notations du Paragraphe* 1, *il suffit d'établir les Théorèmes* 1.9 *et* 1.1, *partie* (1), *lorsque K est la k-algèbre engendrée par les éléments a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant d_i)$, β_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ et γ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. De plus, on peut supposer que la forme linéaire $\mathscr{L}$ et le point $\mathbf{u} = (u_0, ..., u_n)$ vérifient les conditions suivantes*:

(i) $\beta_0 = -1$, *i.e.*, $\mathscr{L}(\mathbf{z}) = -z_0 + \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_n z_n$, *et les* β_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *ne sont pas tous nuls.*

(ii) $u_0 = 0$ *ou* $u_0 = 1$.

(iii) *Si* $u_0 = 0$, *alors* $|\beta_i| \leqslant 1$ *pour tout* i, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Démonstration. La première assertion est facile. Quant à la démonstration de la seconde, elle est semblable en tous points à celle du Lemme 4.1 de [Dav], et nous renvoyons le lecteur à cette référence pour une preuve, qu'il nous semble inutile de répéter. ∎

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que le corps K, la forme $\mathscr{L}$ et le point $\mathbf{u}$ de C^{n+1} satisfont les conditions de la Proposition 3.3.

4. CHOIX DES PARAMÈTRES ET D'UN SOUS-T-MODULE PRIVILÉGIÉ

Dans toute la suite de ce texte, on désigne par $c_1, c_2, \dots$, des réels >0 ne dépendant que de q, n et d, effectivement calculables,[1] et l'on choisit un réel $C_0 = C_0(q, n, d)$, suffisamment grand pour pouvoir satisfaire les différentes inégalités qui interviendront (C_0 sera en particulier beaucoup plus grand que les réels c_i). Avec les notations du Théorème 1.1, on définit alors des réels U_0, $M^\sharp$, $M_0^\sharp$, $S^\sharp$, $S_0^\sharp$, $L_1^\sharp, \dots, L_n^\sharp$, et des entiers M, M_0, S, S_0, $L_1, \dots, L_n$ comme suit ($[x]$ désigne la partie entière de x):

$$\begin{aligned} U_0 = C_0^{6d+8}(Dh)^{d+2}\,\delta^{d+1}(\log B)\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\log V_i\right)(\log^+\delta)^{d+2} \\ \times(\log(Dh)+\log\log V)(\log\log B+\log(Dh)+\log\log V)^{d+1-n} \\ \times(\log E)^{-(n-1)}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} M^\sharp &= \frac{U_0}{C_0^2 Dh(\log^+\delta)(\log E)(\log\log B+\log(Dh)+\log\log V)}, \\ M &= [M^\sharp], \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$M_0^\sharp = \frac{M^\sharp}{C_0^4\,\delta\log^+\delta}, \qquad M_0 = [M_0^\sharp], \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} q^{S^\sharp} &= C_0^6\,Dh\,\delta\log^+\delta(\log\log B+\log(Dh)+\log\log V), \\ S &= [S^\sharp], \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$q^{S_0^\sharp} = \frac{q^{S^\sharp}}{C_0^4\,\delta\log^+\delta}, \qquad S_0 = [S_0^\sharp], \tag{4.5}$$

$$L_i^\sharp = \frac{U_0}{C_0^2\,Dh\,q^{d_iS}(\log V_i)(\log^+\delta)} \qquad \text{et} \qquad L_i = [L_i^\sharp], \quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{4.6}$$

Lorsque U est un réel >0, on définit encore la fonction de U suivante:

$$L_0^\sharp(U) = \frac{U}{C_0^3\,Dh(\log B)(\log^+\delta)(\log E)(\log(Dh)+\log\log V)}. \tag{4.7}$$

On prend alors pour U le réel donné par la Proposition 4.9 ci-après, et on pose

$$L_0^\sharp = L_0^\sharp(U) \qquad \text{et} \qquad L_0 = [L_0^\sharp]. \tag{4.8}$$

[1] On notera que c_1 et c_2 ont déjà été définis à la Proposition 2.17.

Ce nombre réel U est choisi essentiellement de façon qu'aucun sous-T-module H de G vérifiant $T_H \subset W$ ne puisse satisfaire la conclusion du lemme de zéros (cf. Lemme 9.1). Il permet également de choisir un sous-T-module $\tilde{H}$ extrémal, qui jouera un rôle capital dans la suite. Ce sous-T-module $\tilde{H}$ est en quelque sorte le T-module "le plus près" de satisfaire l'inégalité du lemme de zéros, et de ce fait nous permettra d'obtenir l'estimation la plus fine possible du rang du système linéaire considéré au Paragraphe 6.

Afin d'énoncer la Proposition 4.9 permettant de choisir U et $\tilde{H}$, on introduit la notation suivante: lorsque S est un entier $\geqslant 0$, on définit

$$\Gamma(S) = \{\exp_G(s\mathbf{u}) \mid s \in A \text{ et } \deg s \leqslant S\}.$$

On a alors (on rappelle que la notation $\mathscr{H}(\cdot)$ a été définie au Paragraphe 2.6):

Proposition 4.9. *Il existe un nombre réel $U > 0$ vérifiant les propriétés suivantes (on note $L_0^\sharp = L_0^\sharp(U)$ pour simplifier):*

(i) *Pour tout sous-T-module H de G tel que $T_H \subset W$, on a:*

$$M^{\sharp \operatorname{codim}_W T_H} \operatorname{card}((\Gamma(S-n-1)+H)/H)\, \mathscr{H}(H; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp) \geqslant C_0 L_0^\sharp \cdots L_n^\sharp.$$

(ii) *Il existe un sous-T-module $\tilde{H}$ de G tel que $T_{\tilde{H}} \subset W$ et satisfaisant:*

$$M^{\sharp \operatorname{codim}_W T_{\tilde{H}}} \operatorname{card}((\Gamma(S-n-1)+\tilde{H})/\tilde{H})\, \mathscr{H}(\tilde{H}; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp) = C_0 L_0^\sharp \cdots L_n^\sharp.$$

(iii) $U \leqslant U_0$.

Remarque. On notera que d'après (4.4) et les conditions (1.2), on a $q^{S^\sharp} \geqslant C_0^6$, donc $S-n-1 \geqslant 0$ (il suffit de choisir $C_0 \geqslant q^{(n+1)/6}$), de sorte que $\Gamma(S-n-1)$ est bien défini.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de [Dav, Proposition 5.1]. Rappelons-en brièvement la démonstration. Pour H sous-T-module de G tel que $T_H \subset W$, on pose

$$f(H) = \frac{U\, M^{\sharp \operatorname{codim}_W T_H} \operatorname{card}((\Gamma(S-n-1)+H)/H)\, \mathscr{H}(H; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp)}{C_0 L_0^\sharp \cdots L_n^\sharp}.$$

On vérifie que cette expression ne dépend que de H mais pas de U, puis on prend $\tilde{H}$ tel que $f(\tilde{H})$ soit minimum (il est facile de voir que f admet un minimum car $\operatorname{card}((\Gamma(S-n-1)+H)/H) \leqslant \operatorname{card}(\Gamma(S-n-1))$, $\operatorname{codim}_W T_H \leqslant n$, et $\mathscr{H}(H; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de monômes en $L_1^\sharp, ..., L_n^\sharp$ de degré inférieur à n). En posant alors

$U = f(\tilde{H})$, on a immédiatement (i) et (ii). On a également, d'après les choix de paramètres faits plus haut:

$$U = f(\tilde{H}) \leqslant f((0)) \leqslant \frac{M^{\sharp^n} q^{S^\sharp - n}}{C_0(L_0^\sharp/U)\, L_1^\sharp \cdots L_n^\sharp} \leqslant \frac{U_0}{q^n},$$

d'où $U \leqslant U_0$. ▮

Ce choix de paramètres et du sous-groupe $\tilde{H}$ étant fait, nous allons maintenant majorer $\deg \tilde{H}$, ce qui nous donnera la majoration du degré (1.7) figurant dans l'énoncé du Théorème 1.1. Rappelons que pour tout $r \in \{1, ..., n\}$ on note $d(r) = \max\{d_{i_1} + \cdots + d_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n\}$. On posera encore $d(r) = 0$ si $r = 0$. On a alors le lemme suivant:

LEMME 4.10. *Le sous-T-module $\tilde{H}$ de G vérifie les conditions suivantes*:

(i) *On a* $\tilde{H} = (0) \times H_1$, *où* H_1 *est un sous-T-module de* $(\mathbb{G}_a^n, \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n)$.

(ii) *Si* $r = \dim \tilde{H}$, *on a la majoration*:

$$\deg \tilde{H} \leqslant q^d C_0^{6d(r)+6} (Dh)^{d(r)+1}\, \delta^{d(r)+1} \left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant r} \log V_i \right) (\log^+ \delta)^{d(r)+1}$$
$$\times (\log\log B + \log(Dh) + \log\log V)^{d(r)+1-r} (\log E)^{-r}.$$

Démonstration. Le point (i) a déjà été vu dans la preuve du Lemme 3.1, puisqu'on a ici $\beta_0 \neq 0$ et $T_{\tilde{H}} \subset W$. Montrons donc (ii). D'après la Proposition 2.16, on a $\deg \tilde{H} \leqslant \mathscr{H}(\tilde{H}; 1, ..., 1)$, de sorte qu'il suffit de majorer $\mathscr{H}(\tilde{H}; 1, ..., 1)$. Pour ce faire nous supposerons, afin de simplifier les notations, que l'on a $L_1^\sharp \leqslant \cdots \leqslant L_n^\sharp$. Alors $\mathscr{H}(\tilde{H}; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp) \geqslant L_1^\sharp \cdots L_r^\sharp \mathscr{H}(\tilde{H}; 1, ..., 1)$. Utilisons la Proposition 4.9 (ii). On obtient:

$$\mathscr{H}(\tilde{H}; 1, ..., 1) \leqslant \frac{\mathscr{H}(\tilde{H}; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp)}{L_1^\sharp \cdots L_r^\sharp} \leqslant \frac{C_0 L_0^\sharp L_{r+1}^\sharp \cdots L_n^\sharp}{(M^\sharp)^{n-r}}.$$

En remplaçant alors $L_0^\sharp$, $L_{r+1}^\sharp, ..., L_n^\sharp$, $M^\sharp$ par leurs expressions et en majorant U par U_0, il vient:

$$\mathscr{H}(\tilde{H}; 1, ..., 1) \leqslant \frac{U_0 (\log E)^{n-r-1}}{C_0^2 Dh (\log B)(\log^+ \delta)(\prod_{r+1 \leqslant i \leqslant n} \log V_i)}$$
$$\times \frac{(\log\log B + \log(Dh) + \log\log V)^{n-r}}{(\log(Dh) + \log\log V)\, q^{(d_{r+1} + \cdots + d_n) S}}.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la minoration $q^S \geqslant q^{S^\#}/q$, puis à remplacer U_0 et $q^{S^\#}$ par leurs expressions (4.1) et (4.4), ce qui donne exactement la majoration annoncée pour $\deg \tilde{H}$. Le lemme est donc démontré. ▮

Nous allons maintenant établir quelques inégalités qui nous seront utiles dans la suite.

Lemme 4.11. *On a les inégalités suivantes*:

(i) $q^S \leqslant U_0$;

(ii) $M \geqslant M_0 \geqslant C_0$, *et pour tout* i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $L_i \geqslant C_0$;

(iii) $D^3 \log B \leqslant U_0/C_0 \log^+ \delta$; $D^3 \log V \leqslant U_0/C_0 \log^+ \delta$; $D^3 h \leqslant U_0/C_0 \log^+ \delta$;

(iv) $L_0 \geqslant C_0$;

(v) $\forall i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $M^\# \geqslant C_0 L_i^\#$;

(vi) $L_0 S \leqslant U_0/C_0 D \log^+ \delta$;

(vii) $Mh \log(C_0 U_0) \leqslant U_0/C_0 D \log^+ \delta$.

Démonstration. Les inégalités (i), (ii) (iii) et (v) résultent facilement de la définition des différents paramètres, du choix de C_0, et de la majoration de $\log E$ donnée par la Proposition 2.19. Pour montrer (vi) et (vii), on part de la majoration de δ obtenue au Paragraphe 3 (Proposition 3.2), qui nous donne:

$$\log^+ \delta \leqslant d \log q + n \log D + n \log \log V. \tag{4.12}$$

L'expression de $q^{S^\#}$ et le choix de C_0 conduisent alors à l'inégalité $S \leqslant C_0(\log \log B + \log(Dh) + \log \log V)$. On tire de là et de la définition de $L_0^\#$ la majoration (vi). De même, en utilisant (4.12) et la définition de U_0, on voit que $\log(C_0 U_0) \leqslant C_0(\log \log B + \log(Dh) + \log \log V)$, d'où résulte facilement (vii). Montrons enfin (iv). Pour cela, en reprenant les notations de la démonstration de la Proposition 4.9, on a:

$$U = f(\tilde{H}) \geqslant \frac{U M^{\#^{\operatorname{codim}_W T_{\tilde{H}}}} \mathscr{H}(\tilde{H}; L_0^\#, \ldots, L_n^\#)}{C_0 L_0^\# L_1^\# \cdots L_n^\#} \tag{4.13}$$

en minorant $\operatorname{card}((\Gamma(S-n-1)+\tilde{H})/\tilde{H})$ par 1. Par ailleurs, $\mathscr{H}(\tilde{H}; L_0^\#, \ldots, L_n^\#)/L_1^\# \cdots L_n^\#$ est minoré par un produit $(\prod_{1 \leqslant k \leqslant s} L_{i_k}^{\#^{-1}})$, où $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n$ et où on a noté $s = \operatorname{codim}_W T_{\tilde{H}}$. Comme $L_{i_k}^{\#^{-1}} \geqslant C_0^2 D h q^S (\log V_0)(\log^+ \delta)/U_0$ par (4.6), l'inégalité (4.13) nous donne donc (en utilisant en outre (4.2) et (4.4))

$$L_0^\# \geqslant \left(\frac{C_0^6}{q} \delta \log^+ \delta \frac{Dh \log V_0}{\log E} \right)^s \times \frac{1}{C_0}.$$

On remarque alors que puisque les coefficients β_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ne sont pas tous nuls (Proposition 3.3), W n'est pas de la forme $(0) \times \mathscr{V}$, et donc $T_{\tilde{H}} \neq W$ (voir Lemme 4.10(i)). Il en résulte $s \geqslant 1$ et finalement, par la Proposition 2.19, $L_0^\sharp \geqslant C_0^4 \delta \log^+ \delta \geqslant C_0^4$. Ceci achève de démontrer le lemme. ∎

5. LES DEUX CAS. CHOIX DE BASES POUR L'HYPERPLAN W

Le but de ce paragraphe est de définir les différentes bases de W que nous considérerons dans la suite et d'estimer les valeurs absolues des coefficients des matrices de passage. Comme dans [Hir, Phi-Wal, Dav], nous allons être amenés à considérer deux cas.

5.1. *Les deux cas*

Rappelons que l'on note $\mathbf{u} = (u_0, ..., u_n) \in C^{n+1}$ et que l'on a choisi, au paragraphe précédent (Proposition 4.9), un sous-T-module particulier $\tilde{H}$ de G. Notons $\Lambda_G = \operatorname{Ker}(\exp_G)$ le noyau de l'exponentielle de G. On dira que l'on est dans le cas “périodique” s'il existe un élément $s_0 \in A$, $s_0 \neq 0$, tel que $\deg s_0 \leqslant S$ et $s_0 \mathbf{u} \in \Lambda_G + T_{\tilde{H}}$. Sinon, on dira que l'on est dans le cas “non périodique”. Remarquons tout de suite que puisque $T_{\tilde{H}}$ est de la forme $(0) \times T_{H_1}$ et que $\operatorname{Ker} e_{\Phi_0} = (0)$, on a nécessairement $u_0 = 0$ dans le cas périodique. Cette remarque nous sera utile ultérieurement. Notons aussi que sous les hypothèses du Théorème 1.9, le cas périodique ne peut pas se produire: ceci résulte immédiatement de la condition (iii) de ce théorème (et du Lemme 3.1).C'est ce fait qui permettra d'obtenir, dans la conclusion du Théorème 1.9, la minoration (1.8) avec $\delta = 1$ (cf. démonstration de la Proposition 6.10).

On définit encore un sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathbb{N}^n \times A$ comme suit:

$$\mathscr{E} = \{(\mathbf{j}, s) \in \mathbb{N}^n \times A \mid 0 \leqslant j_k \leqslant (n+2)\, M, 1 \leqslant k \leqslant n, \deg s \leqslant S_0\}$$

dans le cas non périodique, et

$$\mathscr{E} = \{(\mathbf{j}, s) \in \mathbb{N}^n \times A \mid 0 \leqslant j_k \leqslant (n+1)\, M, 1 \leqslant k \leqslant n-1, 0 \leqslant j_n < M_0, \deg s \leqslant S\}$$

dans le cas périodique. Cet ensemble interviendra au paragraphe suivant (Paragraphe 6) lors de la construction de la fonction auxiliaire F.

Enfin, afin de traiter les deux cas simultanément, on pose

$$M_1 = M, \qquad S_1 = S_0 \quad \text{dans le cas non périodique,}$$

et

$$M_1 = M_0, \qquad S_1 = S \quad \text{dans le cas périodique.}$$

5.2. *Bases* $\mathbf{e}$ *et* $\tilde{\mathbf{e}}$

Rappelons que la forme linéaire $\mathscr{L}$ s'écrit, d'après la Proposition 3.3:

$$\mathscr{L}(\mathbf{z}) = -z_0 + \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_n z_n.$$

Nous noterons $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ la base de $W = \operatorname{Ker} \mathscr{L}$ définie par:

$$\mathbf{e}_i = (\beta_i, 0, ..., 1, ..., 0), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Cette base étant inadaptée pour la suite de la démonstration, nous allons choisir une autre base de W (notée $\tilde{\mathbf{e}}$). Nous allons utiliser pour cela la notion de base orthonormale dans les espaces normés de dimension finie sur un corps valué non archimédien. Commençons par en rappeler la définition (voir [Bos-Gün-Rem, Définition 1 du Paragraphe 2.5] ou [Ami, Chap. 3, Définition 3.1.2]).

DÉFINITION 5.1. *Soient* $(\mathscr{K}, |\cdot|)$ *un corps valué non archimédien, et* $(\mathscr{V}, \|\cdot\|)$ *un* $\mathscr{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie n. Une famille* $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ *d'éléments de* $\mathscr{V}$ *est appelée base orthonormale de* $\mathscr{V}$ *si c'est une base de* $\mathscr{V}$ *telle que, pour tout* $\mathbf{x}$ *de* $\mathscr{V}$, *on ait*

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$$

où $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$.

On dispose alors du résultat suivant:

LEMME 5.2. *Soient* $(\mathscr{K}, |\cdot|)$ *un corps valué non archimédien complet, à valuation discrète (non triviale), et* $(\mathscr{V}, \|\cdot\|)$ *un* $\mathscr{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose la condition suivante satisfaite*:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathscr{V}, \quad \exists \lambda \in \mathscr{K}, \qquad \|\mathbf{x}\| = |\lambda|. \tag{N}$$

Alors, si $\mathscr{W}$ *est un sous-espace de* $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ *possède une base orthonormale, et toute base orthonormale de* $\mathscr{W}$ *peut se compléter en une base orthonormale de* $\mathscr{V}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des résultats de [Bos-Gün-Rem]. En effet, en utilisant la terminologie de cet ouvrage, l'espace $\mathscr{V}$ est ici faiblement $\mathscr{K}$-cartésien puisque $\mathscr{K}$ est complet [Bos-Gün-Rem, Proposition 4 du Paragraphe 2.3.3]. Mais d'après les hypothèses faites, $\mathscr{V}$ est même strictement $\mathscr{K}$-cartésien (ibid., Proposition 3 du Paragraphe 2.4.2 et Observation 2 du Paragraphe 2.5.1). Le lemme résulte alors de la Proposition 5 du Paragraphe 2.5.1. ∎

On déduit de ce lemme la proposition suivante:

PROPOSITION 5.3. *Soit r la dimension de $\tilde{H}$. Alors il existe une base $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n)$ de W telle que $(\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_r)$ soit une base de $T_{\tilde{H}}$ et telle que les coefficients des matrices de passage de $\mathbf{e}$ à $\tilde{\mathbf{e}}$ et de $\tilde{\mathbf{e}}$ à $\mathbf{e}$ soient de valeur absolue $\leqslant 1$. De plus, une telle base $\tilde{\mathbf{e}}$ peut être choisie rationnelle sur K'_∞ où $K' \subset C$ est une extension finie de K de degré $\leqslant c_3$.*

Démonstration. D'après la remarque suivant le Lemme 2.22 de [Dav-Den], l'espace tangent $T_{\tilde{H}}$ est rationnel sur K', où $K' \subset C$ est une extension finie de K de degré $\leqslant c_3$. Comme W est par ailleurs rationnel sur K, les sous-espaces W et $T_{\tilde{H}}$ de C^{n+1} sont donc a fortiori rationnels sur le corps K'_∞. Notons $W(K'_\infty)$ et $T_{\tilde{H}}(K'_\infty)$ les K'_∞-structures de W et $T_{\tilde{H}}$. On a $\dim_{K'_\infty} W(K'_\infty) = n$ et $\dim_{K'_\infty} T_{\tilde{H}}(K'_\infty) = r$. Définissons la norme $\|\cdot\|$ sur $W(K'_\infty)$ par $\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, pour $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n \in W(K'_\infty)$. Puisque $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ est rationnelle sur K'_∞, le K'_∞-espace vectoriel normé $(W(K'_\infty), \|\cdot\|)$ vérifie la condition (N) du Lemme 5.2. D'autre part, K'_∞ est non archimédien complet à valuation discrète. On peut donc appliquer le Lemme 5.2. Il existe donc une base orthonormale $(\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n)$ de $W(K'_\infty)$ telle que $(\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_r)$ soit une base orthonormale de $T_{\tilde{H}}(K'_\infty)$. La famille $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n)$ est alors une base de W sur C, rationnelle sur K'_∞, telle que $(\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_r)$ soit une base de $T_{\tilde{H}}$. De plus, si l'on note $(p_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ et $(q_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ les matrices de passage de $\mathbf{e}$ à $\tilde{\mathbf{e}}$ et de $\tilde{\mathbf{e}}$ à $\mathbf{e}$ respectivement, on a

$$\tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{ij} \mathbf{e}_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{e}_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} q_{ij} \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Il en résulte immédiatement, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$1 = \|\tilde{\mathbf{e}}_j\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |p_{ij}| \qquad \text{et} \qquad 1 = \|\mathbf{e}_j\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |q_{ij}|.$$

Ceci achève la démonstration. ∎

Dans toute la suite, on se fixe $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n)$ une base de W donnée par la proposition précédente.[2]

5.3. *Base* $\mathbf{f}$

Nous allons démontrer les Théorèmes 1.1 et 1.9 par l'absurde. Dorénavant, et jusqu'au Paragraphe 9, nous ferons donc l'hypothèse suivante, qu'il s'agira de contredire (on convient bien entendu que $\log_q |\mathscr{L}(\mathbf{u})| = -\infty$ si $\mathscr{L}(\mathbf{u}) = 0$):

[2] En fait, au paragraphe suivant, on renumérotera (dans le cas périodique) les derniers vecteurs de la base $\tilde{\mathbf{e}}$ choisie ici, et c'est cette nouvelle base que l'on appellera $\tilde{\mathbf{e}}$.

Hypothèse 5.4. *Le point* $\mathbf{u}$ *vérifie* $\mathbf{u} \notin T_{\tilde{H}}$, *et on a* $\log_q |\mathscr{L}(\mathbf{u})| < -C_0 U_0$.

Remarque. On notera que sous les hypothèses du Théorème 1.9, on a nécessairement $\mathbf{u} \notin T_{\tilde{H}}$. L'Hypothèse 5.4 s'écrit donc plus simplement dans ce cas $\log_q |\mathscr{L}(\mathbf{u})| < -C_0 U_0$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le lemme suivant, qui va nous permettre de construire (dans le cas périodique) la base $\mathbf{f}$. On reprend pour cela la distance d (distance du sup) introduite au Paragraphe 2.7. On définit encore le point $\mathbf{w}$ de C^{n+1} par $\mathbf{w} = (u_0 + \mathscr{L}(\mathbf{u}), u_1, ..., u_n)$. Alors on a $\mathbf{w} \in W$, et $d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = |\mathscr{L}(\mathbf{u})|$. On dispose de plus des propriétés suivantes:

Lemme 5.5. *On suppose qu'on est dans le cas périodique. Alors*:

(i) $d(\mathbf{u}, T_{\tilde{H}}) \geqslant 1/C_0^2 U_0^{n+1} q^S q^{Dh} (Dh)^{c_1}$.

(ii) $d(\mathbf{w}, T_{\tilde{H}}) \geqslant d(\mathbf{u}, T_{\tilde{H}})$, *et donc* $\mathbf{w} \notin T_{\tilde{H}}$.

(iii) *Si l'on écrit, dans la base* $\tilde{\mathbf{e}}$ *choisie au Paragraphe* 5.2, $\mathbf{w} = w_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \cdots + w_n \tilde{\mathbf{e}}_n$, *et si l'on note* $r = \dim \tilde{H}$, *alors on a* $r < n$, *et il existe un entier* $i \in \{r+1, ..., n\}$ *tel que*

$$|w_i| \geqslant \frac{1}{C_0^2 U_0^{n+1} q^S q^{Dh} (Dh)^{c_1}}.$$

Démonstration. Commençons par démontrer (i). Rappelons que par définition du cas périodique, il existe $s_0 \in A$ non nul tel que $\deg s_0 \leqslant S$ et $s_0 \mathbf{u} \in \Lambda_G + T_{\tilde{H}}$. Écrivons $s_0 \mathbf{u} = \boldsymbol{\eta} + \mathbf{x}$, avec $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda_G$ et $\mathbf{x} \in T_{\tilde{H}}$. On a:

$$d(\mathbf{u}, T_{\tilde{H}}) = \frac{1}{|s_0|} d(s_0 \mathbf{u}, T_{\tilde{H}}) = \frac{1}{|s_0|} d(\boldsymbol{\eta}, T_{\tilde{H}}) \geqslant q^{-S} d(\boldsymbol{\eta}, T_{\tilde{H}}).$$

Mais $\boldsymbol{\eta} \notin T_{\tilde{H}}$, car sinon on aurait $s_0 \mathbf{u} \in T_{\tilde{H}}$, ce qui contredit l'Hypothèse 5.4. On obtient donc, par la Proposition 2.17:

$$d(\mathbf{u}, T_{\tilde{H}}) \geqslant \frac{1}{c_2 q^S q^{Dh} (Dh)^{c_1} \mathscr{H}(\tilde{H}; 1, ..., 1)}.$$

Puisque tous les $L_i^\sharp$ sont $\geqslant 1$ par le Lemme 4.11, on majore alors $\mathscr{H}(\tilde{H}; 1, ..., 1)$ par $\mathscr{H}(\tilde{H}; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp)$, que l'on majore à son tour (grâce à la Proposition 4.9(ii)) par $C_0 L_0^\sharp \cdots L_n^\sharp \leqslant C_0 U_0^{n+1}$. Puisque C_0 est choisi suffisamment grand, on obtient donc (i).

Pour montrer (ii), on commence par remarquer que l'on a $\log_q (C_0^2 U_0^{n+1} q^S q^{Dh} (Dh)^{c_1}) \leqslant C_0 U_0$, ce qui résulte immédiatement des inégalités $q^S \leqslant U_0$ et $Dh \leqslant U_0$ (cf. Lemme 4.11(i) et (iii)), et du choix de C_0. On a donc, compte tenu de l'Hypothèse 5.4: $|\mathscr{L}(\mathbf{u})| < d(\mathbf{u}, T_{\tilde{H}})$. D'autre part, l'inégalité ultramétrique donne: $d(\mathbf{u}, T_{\tilde{H}}) \leqslant \max\{d(\mathbf{u}, \mathbf{w}), d(\mathbf{w}, T_{\tilde{H}})\} = \max\{|\mathscr{L}(\mathbf{u})|, d(\mathbf{w}, T_{\tilde{H}})\}$. On en déduit d'abord $d(\mathbf{w}, T_{\tilde{H}}) \geqslant |\mathscr{L}(\mathbf{u})|$, puis $d(\mathbf{w}, T_{\tilde{H}}) \geqslant d(\mathbf{u}, T_{\tilde{H}})$ comme annoncé. En particulier, $d(\mathbf{w}, T_{\tilde{H}}) \neq 0$ d'après (i), donc $\mathbf{w} \notin T_{\tilde{H}}$.

Montrons enfin (iii). Tout d'abord, on a $r < n$ car $T_{\tilde{H}} \subsetneq W$ d'après l'assertion (ii). Notons alors $\mathbf{w}' = w_{r+1}\tilde{\mathbf{e}}_{r+1} + \cdots + w_n\tilde{\mathbf{e}}_n$, et écrivons, dans la base canonique de C^{n+1}, $\mathbf{w}' = (x_0, ..., x_n)$. D'après le choix des bases $\mathbf{e}$ et $\tilde{\mathbf{e}}$ fait ci-dessus, et puisque d'après la Proposition 3.3 les coefficients β_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont ici de valeur absolue $\leqslant 1$ (on a vu en effet au Paragraphe 5.1 que le cas périodique impose $u_0 = 0$), les coordonnées de $\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n$ dans la base canonique sont de valeur absolue $\leqslant 1$. Il s'ensuit que l'on a, pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$: $|x_i| \leqslant \max_{r < j \leqslant n} |w_j|$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on ait:

$$\forall j, \quad r+1 \leqslant j \leqslant n, \qquad |w_j| < \frac{1}{C_0^2 U_0^{n+1} q^S q^{Dh} (Dh)^{c_1}}.$$

Alors on a:

$$d(\mathbf{w}', T_{\tilde{H}}) \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_i| < \frac{1}{C_0^2 U_0^{n+1} q^S q^{Dh} (Dh)^{c_1}}.$$

Mais comme $\mathbf{w} - \mathbf{w}' \in T_{\tilde{H}}$, on a $d(\mathbf{w}, T_{\tilde{H}}) = d(\mathbf{w}', T_{\tilde{H}})$, et l'inégalité précédente contredit les parties (i) et (ii) du lemme. D'où la conclusion. ∎

Renumérotons, dans le cas périodique, les vecteurs $\tilde{\mathbf{e}}_{r+1}, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n$ de la base $\tilde{\mathbf{e}}$ choisie au Paragraphe 5.2, de sorte que l'on puisse prendre $i = n$ dans l'assertion (iii) du Lemme 5.5. Alors $w_n \neq 0$, donc la famille $(\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_{n-1}, \mathbf{w})$ forme une base de W. Dans toute la suite du texte, on notera $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n) = (\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_{n-1}, \mathbf{w})$ cette base.

Afin de traiter les cas périodique et non périodique simultanément avec les mêmes notations, on posera, dans le cas non périodique, $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n) = (\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n)$, i.e. $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{e}}$.

5.4. *Matrices de passage*

L'objet de ce paragraphe est d'établir la Proposition 5.7, permettant de contrôler les valeurs absolues (ou les degrés) des coefficients des matrices de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{f}$ et de $\mathbf{f}$ à $\mathbf{e}$. Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant:

LEMME 5.6. *On écrit, dans la base* $\tilde{\mathbf{e}}$, $\mathbf{w} = w_1\tilde{\mathbf{e}}_1 + \cdots + w_n\tilde{\mathbf{e}}_n$. *Alors, pour tout* i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *on a*:

$$\deg w_i \leqslant c_4 Dh \log(C_0 U_0).$$

Démonstration. Notons $\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{\varepsilon}_0, ..., \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ la base canonique de C^{n+1}. Comme $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \notin W$, la famille $(\boldsymbol{\varepsilon}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n)$ forme une base de C^{n+1}. Notons Q la matrice de passage de la base $(\boldsymbol{\varepsilon}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n)$ à la base $\boldsymbol{\varepsilon}$. On a:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0+\mathscr{L}(\mathbf{u}) \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad Q=\begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 & \cdots & -\beta_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & (R) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(où R est la matrice de passage de $\tilde{\mathbf{e}}$ à $\mathbf{e}$). Comme les coefficients de R sont de valeur absolue $\leqslant 1$ (Proposition 5.3), on obtient donc, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\deg w_i \leqslant \max\{\deg u_j, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Mais de l'inégalité (1.4) et de la Proposition 2.2(i), on tire $\deg u_j = \log_q |u_j| \leqslant \log_q (D \log V) + dDh + d$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. On en déduit bien le lemme, compte tenu de l'inégalité $D \log V \leqslant U_0$ (cf. Lemme 4.11(iii)). ∎

Nous pouvons maintenant estimer les degrés des coefficients des matrices de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{f}$ et de $\mathbf{f}$ à $\mathbf{e}$.

PROPOSITION 5.7. *Notons $(e_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ la matrice de passage de* $\mathbf{f}$ *à* $\mathbf{e}$, *et $(f_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ la matrice de passage de* $\mathbf{e}$ *à* $\mathbf{f}$. *Alors on a, pour tout (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant n$:*

$$\deg(e_{ij}) \leqslant c_5 Dh \log(C_0 U_0),$$

et

$$\deg(f_{ij}) \leqslant c_4 Dh \log(C_0 U_0).$$

Démonstration. Comme d'après la Proposition 5.3 les matrices de passage de $\mathbf{e}$ à $\tilde{\mathbf{e}}$ et de $\tilde{\mathbf{e}}$ à $\mathbf{e}$ ont leurs coefficients de valeur absolue $\leqslant 1$, l'inégalité ultramétrique montre qu'il suffit d'établir les majorations de la proposition pour les matrices de passage de $\mathbf{f}$ à $\tilde{\mathbf{e}}$ et de $\tilde{\mathbf{e}}$ à $\mathbf{f}$. Dans le cas non périodique, la proposition devient donc triviale puisque dans ce cas $\tilde{\mathbf{e}}=\mathbf{f}$. Plaçons-nous dans le cas périodique. La matrice de passage de $\tilde{\mathbf{e}}$ à $\mathbf{f}$ est alors

$$(f'_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} = \begin{pmatrix} & & & w_1 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & w_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & w_n \end{pmatrix},$$

et le lemme précédent permet de conclure $\deg(f'_{ij}) \leqslant c_4 Dh \log(C_0 U_0)$. Pour l'autre inégalité, on remarque que la matrice de passage de $\mathbf{f}$ à $\tilde{\mathbf{e}}$ s'écrit

$$(e'_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} = \begin{pmatrix} & & & -w_1/w_n \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & -w_{n-1}/w_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1/w_n \end{pmatrix},$$

et l'on utilise à nouveau le lemme précédent, ainsi que le Lemme 5.5(iii) (rappelons que par choix de la base $\tilde{\mathbf{e}}$, w_n vérifie l'inégalité de ce lemme). On obtient

$$\deg(e'_{ij}) \leqslant c_4 Dh \log(C_0 U_0) + \log_q (C_0^2 U_0^{n+1} q^S q^{Dh} (Dh)^{c_1}) \qquad (1 \leqslant i,\, j \leqslant n),$$

d'où, puisque $q^S \leqslant U_0$ (cf. Lemme 4.11(i)): $\deg(e'_{ij}) \leqslant c_5 Dh \log(C_0 U_0)$. La proposition est donc démontrée. ▮

6. CONSTRUCTION DE LA FONCTION AUXILIAIRE

Nous construisons dans ce paragraphe la fonction auxiliaire dont nous aurons besoin pour la suite de la preuve des Théorèmes 1.1 et 1.9. Plus précisément, on cherche à construire un polynôme $P \in C[X_0, ..., X_n]$ non nul, dont le degré par rapport à X_i est $\leqslant L_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, et qui vérifie $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}) = 0$ pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$ tel que $\|\mathbf{j}\| \leqslant (n+1) M$ et tout $s \in A$ tel que $\deg s \leqslant S$ (où on a posé $F = P \circ \exp_G$). Nous procéderons pour cela comme dans [Hir], [Phi-Wal] ou [Dav], en introduisant un système linéaire homogène dont les équations correspondent aux conditions

$$\forall (\mathbf{j}, s) \in \mathscr{E}, \qquad D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}) = 0 \tag{6.1}$$

(l'ensemble $\mathscr{E}$ ayant été défini au Paragraphe 5.1). La méthode consiste alors à construire F en déterminant une solution approchée du système (6.1), ceci grâce à un lemme de Siegel.

Au Paragraphe 6.1, on explique précisément quel système linéaire on considère; au Paragraphe 6.2, on en majore le rang; le Paragraphe 6.3 enfin est dévolu à la construction de F proprement dite. Le fait que F vérifie bien les conditions d'annulation demandées ne pourra être établi qu'au Paragraphe 9, après confrontation des résultats des Paragraphes 7 et 8.

6.1. *Le système linéaire à résoudre*

Rappelons que d'après la Proposition 3.3 le corps K est le corps engendré sur k par les éléments a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\, 0 \leqslant j \leqslant d_i)$, β_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ et γ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On dispose alors du lemme suivant:

LEMME 6.2. *Il existe une base* $(\xi_1, ..., \xi_D)$ *de* K *sur* k *telle que*

$$h(1, \xi_1, ..., \xi_D) \leqslant D\left(n \log B + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \log V_i + h\right).$$

Démonstration. L'argument est identique à celui de [Hir, p. 420] ou de [Dav, p. 71]. On rebaptise $\zeta_1, ..., \zeta_N$ les éléments a_{ij}, β_i et γ_i engendrant la k-algèbre K, et on prend pour $(\xi_1, ..., \xi_D)$ une base de K sur k formée d'éléments de la forme $\zeta_1^{\alpha_1} \cdots \zeta_N^{\alpha_N}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N \leqslant D$. ∎

Dans toute la suite, on se fixe une fois pour toutes une base $(\xi_1, ..., \xi_D)$ de K sur k fournie par le Lemme 6.2. Nous pouvons maintenant préciser quel système linéaire nous voulons considérer. Rappelons que l'on veut déterminer un polynôme P non nul, de degré $\leqslant L_i$ par rapport à X_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, et qui soit solution "approchée" du système de contraintes (6.1). On va chercher P sous la forme $P = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} X_0^{\lambda_0} \cdots X_n^{\lambda_n}$, où $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, ..., \lambda_n)$ décrit les $(n+1)$-uples de $\mathbb{N}^{n+1}$ vérifiant $0 \leqslant \lambda_i \leqslant L_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, et où $p_{\boldsymbol{\lambda}}$ s'écrit $p_{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant D} p_{\boldsymbol{\lambda} i} \xi_i$, avec $p_{\boldsymbol{\lambda} i} \in A$. Les conditions (6.1) se traduisent alors par un système linéaire homogène, dont les inconnues sont les $p_{\boldsymbol{\lambda} i} \in A$. Nous parlerons, pour abréger, du "système (6.1)".

6.2. *Rang du système linéaire*

Le but est ici d'établir le lemme suivant, dont nous aurons besoin pour vérifier les hypothèses du Lemme de Siegel au Paragraphe 6.3.

LEMME 6.3. *Le rang* ρ *du système* (6.1) *vérifie*

$$\rho \leqslant c_7 C_0 \frac{M_0^\#}{M^\#} L_0 \cdots L_n,$$

et le nombre d'inconnues ν *vérifie*

$$\nu \geqslant D L_0 \cdots L_n.$$

Seule l'assertion sur le rang est non triviale. Comme dans [Phi-Wal], elle va résulter du lemme un peu plus général suivant, qui évite de distinguer les deux cas (périodique et non périodique).

LEMME 6.4. *Soient* $T_1, ..., T_n$ *et* S_1 *des entiers* > 0. *Alors, avec les notations précédentes, le rang du système*

$$D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}) = 0, \qquad 0 \leqslant j_k < T_k (1 \leqslant k \leqslant n), \quad s \in A, \quad \deg s \leqslant S_1 \qquad (6.5)$$

est inférieur ou égal à

$$2nT_{r+1}\cdots T_n\,\mathrm{card}((\Gamma(S_1)+\tilde{H})/\tilde{H})\,\mathscr{H}(\tilde{H};L_0,\ldots,L_n),$$

où r désigne la dimension du sous-T-module $\tilde{H}$.

Démonstration. Elle est analogue à celle du Lemme 6.7 de [Phi-Wal]. Commençons par introduire quelques notations. Soient $P\in C[X_0,\ldots,X_n]$ un polynôme et $\boldsymbol{\gamma}\in C^{n+1}$ un point. On définit les polynômes $\partial^{\mathbf{j}}_{\boldsymbol{\gamma}}P\in C[X_0,\ldots,X_n]$, pour $\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n$, par la relation (voir [Den5, p. 4]):

$$\forall\mathbf{x}\in C^{n+1},\qquad\forall\mathbf{z}=z_1\mathbf{f}_1+\cdots+z_n\mathbf{f}_n\in W,$$

$$P(\boldsymbol{\gamma}+\mathbf{x}+\exp_G(\mathbf{z}))=\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n}\partial^{\mathbf{j}}_{\boldsymbol{\gamma}}P(\mathbf{x})\,z_1^{j_1}\cdots z_n^{j_n}.$$

On vérifie immédiatement (voir Paragraphe 2.3) que lorsque $\boldsymbol{\gamma}=\exp_G(\mathbf{v})$, $\mathbf{v}\in C^{n+1}$, alors on a, en posant $F=P\circ\exp_G$, $\partial^{\mathbf{j}}_{\boldsymbol{\gamma}}P(0)=D^{\mathbf{j}}_{\mathbf{f}}F(\mathbf{v})$. Ainsi, le système (6.5) peut se réécrire:

$$\partial^{\mathbf{j}}_{\boldsymbol{\gamma}}P(0)=0,\qquad 0\leqslant j_k<T_k(1\leqslant k\leqslant n),\quad\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma(S_1).\tag{6.6}$$

Notons $\mathscr{S}$ un système de représentants dans $\Gamma(S_1)$ des classes de $\Gamma(S_1)+\tilde{H}$ modulo $\tilde{H}$. Désignons encore par $\varphi\colon\mathbb{G}_a^{n+1}\to(\mathbb{P}_1)^{n+1}$ le plongement défini par $\varphi(x_0,\ldots,x_n)=((1,x_0),\ldots,(1,x_n))$, par $C[T_0,X_0,\ldots,T_n,X_n]$ l'anneau des coordonnées de $(\mathbb{P}_1)^{n+1}$, et par $I(\tilde{H})$ l'idéal de définition de $\varphi(\tilde{H})$. Enfin, pour $P\in C[X_0,\ldots,X_n]$ vérifiant $\deg_{X_i}P\leqslant L_i$, $0\leqslant i\leqslant n$, notons $\tilde{P}$ le polynôme multihomogène de multidegré $(L_0,\ldots,L_n)=\mathbf{L}$ défini par

$$\tilde{P}(T_0,X_0,\ldots,T_n,X_n)=T_0^{L_0}\cdots T_n^{L_n}P\left(\frac{X_0}{T_0},\ldots,\frac{X_n}{T_n}\right).$$

Introduisons alors les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\partial^{\mathbf{j}}_{\gamma}P}=0\qquad\text{dans}\quad(C[T_0,X_0,\ldots,T_n,X_n]/I(\tilde{H}))_{\mathbf{L}},\\&\boldsymbol{\gamma}\in\mathscr{S},\qquad j_1=\cdots=j_r=0,\qquad 0\leqslant j_k<T_k(r<k\leqslant n)\end{aligned}\tag{6.7}$$

(l'indice $\mathbf{L}$ signifie, conformément à l'usage, que l'on se restreint à l'espace des polynômes multihomogènes de multidegré $\mathbf{L}$). On vérifie, exactement comme dans [Phi-Wal], que si un polynôme P satisfait (6.7), alors il satisfait aussi (6.6). Le rang du système (6.6) est donc majoré par le nombre d'équations du système (6.7), c'est-à-dire par

$$T_{r+1}\cdots T_n(\mathrm{card}\,\mathscr{S})\,\dim_C(C[T_0,X_0,\ldots,T_n,X_n]/I(\tilde{H}))_{\mathbf{L}}.$$

Afin d'évaluer $\dim_C(C[T_0, X_0, ..., T_n, X_n]/I(\tilde{H}))_{\mathbf{L}}$, considérons le plongement de Segre–Veronese $\varphi' : (\mathbb{P}_1)^{n+1} \to \mathbb{P}_N$ défini par

$$(t_0, x_0, ..., t_n, x_n) \mapsto (t_0^{\alpha_{00}} x_0^{\alpha_{01}} \cdots t_n^{\alpha_{n0}} x_n^{\alpha_{n1}})_{\|\boldsymbol{\alpha}_i\| = L_i,\, 0 \leqslant i \leqslant n},$$

où on a noté, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i0}, \alpha_{i1}) \in \mathbb{N}^2$ et $\|\boldsymbol{\alpha}_i\| = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}$. Désignant par I_N l'idéal premier de définition de $\tilde{H}$ dans l'anneau des coordonnées de $\mathbb{P}_N$ et par $\mathscr{H}(I_N; \cdot)$ la fonction de Hilbert de I_N, on a $\dim_C(C[T_0, X_0, ..., T_n, X_n]/I(\tilde{H}))_{\mathbf{L}} = \mathscr{H}(I_N; 1)$, ainsi que $\mathscr{H}(\tilde{H}; L_0, ..., L_n) = \deg I_N$. Le Théorème de Chardin (voir [Cha]) montre alors que

$$\dim_C (C[T_0, X_0, ..., T_n, X_n]/I(\tilde{H}))_{\mathbf{L}} \leqslant 2n\mathscr{H}(\tilde{H}; L_0, ..., L_n).$$

Finalement, on obtient bien la majoration du lemme. ∎

Démonstration du Lemme 6.3. En reprenant les notations de la fin du Paragraphe 6.1, les inconnues du système (6.1) sont les $p_{\boldsymbol{\lambda} i}$, où $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, ..., \lambda_n)$, $0 \leqslant \lambda_j \leqslant L_j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$, et $1 \leqslant i \leqslant D$. D'où $v = D(L_0+1) \cdots (L_n+1) \geqslant DL_0 \cdots L_n$. Pour majorer le rang ρ, on utilise le Lemme 6.4. Dans le cas non périodique, on a $S_1 = S_0$, $T_1 = \cdots = T_n = (n+2)\,M+1$, et $\operatorname{card}((\Gamma(S_1) + \tilde{H})/\tilde{H}) = q^{S_0+1}$, d'où

$$\begin{aligned}\rho &\leqslant c_6 M^{n-r} q^{S_0+1} \mathscr{H}(\tilde{H}; L_0, ..., L_n)\\ &\leqslant c_6 (M^\sharp)^{n-r}\, q^{S_0+1} \mathscr{H}(\tilde{H}; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp).\end{aligned}$$

En utilisant alors la Proposition 4.9(ii), puis les inégalités $q^{S_0 - S} \leqslant q^{S_0^\sharp + 1 - S^\sharp} = qM_0^\sharp / M^\sharp$ et $L_i^\sharp \leqslant 2L_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, on obtient la majoration voulue dans le cas non périodique. Dans le cas périodique, on a $S_1 = S$, $T_1 = \cdots = T_{n-1} = (n+1)\,M+1$, et $T_n = M_0$, d'où

$$\rho \leqslant c_6 M_0 M^{n-r-1} \operatorname{card}((\Gamma(S) + \tilde{H})/\tilde{H})\, \mathscr{H}(\tilde{H}; L_0, ..., L_n).$$

Le lemme s'obtient comme précédemment à partir de la Proposition 4.9(ii), en remarquant en outre que l'on a $\operatorname{card}((\Gamma(S) + \tilde{H})/\tilde{H}) \leqslant q^{n+1} \operatorname{card}((\Gamma(S-n-1) + \tilde{H})/\tilde{H})$. ∎

6.3. *Construction de la fonction auxiliaire: le lemme de Siegel*

La construction de la fonction auxiliaire F va reposer sur le Lemme de Siegel suivant:

Lemme 6.8. *Soient v, μ et ρ des entiers > 0, $\mathscr{K}$ une extension finie de k_∞, $\Delta = [\mathscr{K} : k_\infty]$, et (α_{ij}) $(1 \leqslant i \leqslant v,\ 1 \leqslant j \leqslant \mu)$ une matrice d'éléments de $\mathscr{K}$ de rang $\leqslant \rho$. Soient encore X et Y des entiers > 0 vérifiant*

$$\rho \Delta Y < Xv.$$

Alors il existe des éléments $x_1, ..., x_\nu$ *de* A, *non tous nuls, tels que*

$$\deg x_i < X, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \nu,$$

et

$$\deg\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant \nu} \alpha_{ij} x_i\right) < X - Y + \max_{1 \leqslant i \leqslant \nu} \{\deg \alpha_{ij}\}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant \mu.$$

Démonstration. C'est une variante du Lemme 4 de [Den3], où l'on remplace le nombre de lignes de la matrice par son rang. Voir aussi [Don, Lemme 2.1 de la première partie]. ∎

Lemme 6.9. *Les coefficients du système* (6.1) *ont un degré majoré par* $c_{10} U_0$.

Démonstration. Pour $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $0 \leqslant \lambda_i \leqslant L_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, notons $P_{\boldsymbol{\lambda}} = X_0^{\lambda_0} \cdots X_n^{\lambda_n}$ et $F_{\boldsymbol{\lambda}} = P_{\boldsymbol{\lambda}} \circ \exp_G$. D'après le Paragraphe 6.1, les coefficients du système (6.1) sont les éléments $\xi_i D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F_{\boldsymbol{\lambda}}(s\mathbf{u})$ de C, avec $(\mathbf{j}, s) \in \mathscr{E}$, $1 \leqslant i \leqslant D$ et $\boldsymbol{\lambda}$ comme ci-dessus. Commençons par majorer $\deg(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F_{\boldsymbol{\lambda}}(s\mathbf{u}))$. Pour cela, on applique la Proposition 2.7 à $P_{\boldsymbol{\lambda}}$ avec $X = 0$ et $\mathbf{v} = s\mathbf{u}$, en remarquant que l'on a $\Theta_1 = 1$ et $\Theta_0 = \max\{1, |\beta_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On obtient:

$$\deg(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F_{\boldsymbol{\lambda}}(s\mathbf{u})) \leqslant c_8 \left(L_0 D \log B + MDh + L_0 S + Dh \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} L_i q^{d_i S} \log V_i\right).$$

Mais par choix des paramètres fait au Paragraphe 4, chacun des termes de la parenthèse est clairement majoré par U_0 (l'inégalité $L_0 S \leqslant U_0$ résulte du Lemme 4.11(vi)). D'où $\deg(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F_{\boldsymbol{\lambda}}(s\mathbf{u})) \leqslant c_9 U_0$. Appliquons maintenant le Lemme 2.5(1) permettant de passer de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{f}$. On obtient, grâce à la Proposition 5.7 et le Lemme 4.11(vii): $\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F_{\boldsymbol{\lambda}}(s\mathbf{u})) \leqslant c_{10} U_0$. On remarque enfin que par le Lemme 6.2 et le Lemme 4.11(iii) on a $\deg \xi_i \leqslant Dh(1, \xi_1, ..., \xi_D) \leqslant U_0$, ce qui achève de démontrer le lemme. ∎

Si P est un polynôme de $K[X_0, ..., X_n]$ de coefficients $p_1, ..., p_N$, on définit la hauteur de P par $h(P) := h(1, p_1, ..., p_N)$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 6.10. *Notons* $D_\infty = [K_\infty : k_\infty]$. *Il existe un polynôme non nul* $P \in K[X_0, ..., X_n]$, *de degré* $\leqslant L_i$ *par rapport à* X_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, *vérifiant*

$$h(P) \leqslant c_{11} U_0 D_\infty / C_0 D \log^+ \delta,$$

et tel que la fonction $F = P \circ \exp_G$ *satisfasse*:

$$\forall(\mathbf{j}, s) \in \mathscr{E}, \qquad \deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})) \leqslant -C_0 U_0/3.$$

De plus, les coefficients $p_{\boldsymbol{\lambda}}$ *de* P *sont de degré majoré par*:

$$\deg p_{\boldsymbol{\lambda}} \leqslant c_{12} U_0 / C_0 \log^+ \delta.$$

Démonstration. Nous allons appliquer le Lemme de Siegel (Lemme 6.8) au système (6.1), avec

$$X = [U_0 D_\infty / C_0 D \log^+ \delta] \qquad \text{et} \qquad Y = [C_0 U_0].$$

Il nous faut pour cela évaluer le degré Δ qui apparaît, et c'est ici que la différence de définition du paramètre δ dans les Théorèmes 1.1 et 1.9 va intervenir. Avec les notations de la démonstration du lemme précédent, les coefficients du système sont de la forme $\xi_i D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F_{\boldsymbol{\lambda}}(s\mathbf{u})$. Comme les éléments ξ_i et $e_{\Phi_i}(su_i)$ sont dans K, et que les coefficients du développement en série entière de e_{Φ_i} sont aussi dans K, on voit facilement que les coefficients du système appartiennent en particulier à la plus petite extension de k_∞ contenant K et les coordonnées de $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n$ dans la base canonique de C^{n+1}. D'après le choix de la base $\mathbf{f}$ et la Proposition 5.3, les coordonnées de $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n$ sont toutes dans un corps K'_∞ tel que $[K' : K] \leqslant c_3$, à l'exception des coordonnées de $\mathbf{f}_n$ dans le cas périodique. Dans ce dernier cas, $\mathbf{f}_n$ est égal à $\mathbf{w} = (\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n, u_1, ..., u_n)$, dont les coordonnées appartiennent au corps $K(u_1, ..., u_n)$. Il résulte de tout ceci que sous les hypothèses générales du Théorème 1.1, les coefficients du système considéré appartiennent tous au corps $\mathscr{K} = K'_\infty(u_1, ..., u_n)$. Par contre, on voit que sous les hypothèses du Théorème 1.9, on peut prendre $\mathscr{K} = K'_\infty$, puisque alors on est automatiquement dans le cas non périodique (voir Paragraphe 5). Il s'ensuit que l'on a $\Delta = [\mathscr{K} : k_\infty] = [\mathscr{K} : K_\infty(u_1, ..., u_n)][K_\infty(u_1, ..., u_n) : k_\infty] \leqslant c_3 D_\infty [K_\infty(u_1, ..., u_n) : K_\infty]$ dans le cas général, et $\Delta = [\mathscr{K} : k_\infty] = [K'_\infty : K_\infty][K_\infty : k_\infty] \leqslant c_3 D_\infty$ dans l'autre cas. On obtient donc dans tous les cas la majoration $\Delta \leqslant c_3 D_\infty \delta$, avec $\delta = [K_\infty(u_1, ..., u_n) : K_\infty]$ (Théorème 1.1) ou $\delta = 1$ (Théorème 1.9). On en déduit, par le Lemme 6.3 et la définition de $M_0^\sharp$:

$$\rho \Delta Y \leqslant c_3 c_7 D_\infty \delta C_0^2 U_0 \frac{M_0^\sharp}{M^\sharp} L_0 \cdots L_n < \frac{D_\infty U_0 v}{2 C_0 D \log^+ \delta} \leqslant X v.$$

On peut donc appliquer le Lemme 6.8. On obtient l'existence d'un polynôme $P \in K[X_0, ..., X_n]$ non nul de la forme $P = \sum_{\boldsymbol{\lambda}, i} p_{\boldsymbol{\lambda} i} \xi_i X_0^{\lambda_0} \cdots X_n^{\lambda_n}$, tel que (grâce au lemme précédent)

$$\forall(i, \boldsymbol{\lambda}), \qquad \deg p_{\boldsymbol{\lambda} i} \leqslant U_0 D_\infty / C_0 D \log^+ \delta \tag{6.11}$$

et

$$\forall (\mathbf{j}, s) \in \mathscr{E}, \qquad \deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})) \leqslant U_0 D_\infty / C_0 D \log^+ \delta - C_0 U_0/2 + c_{10} U_0. \tag{6.12}$$

De l'inégalité (6.12) découle immédiatement la majoration annoncée pour $\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}))$ (car $D_\infty \leqslant D$). La majoration de $h(P)$ résulte de l'inégalité $h(P) \leqslant h(1, \xi_1, ..., \xi_D) + \max_{i,\lambda}\{\deg p_{\lambda i}\}$, ainsi que du Lemme 6.2, de (6.11) et du Lemme 4.11(iii). Enfin, les coefficients de P sont de degré inférieur ou égal à

$$\begin{aligned}\max_{i,\lambda}\{\deg p_{\lambda i}\} + Dh(1, \xi_1, ..., \xi_D) &\leqslant c_{12} D_\infty U_0/C_0 D \log^+ \delta \\ &\leqslant c_{12} U_0/C_0 \log^+ \delta. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7. EXTRAPOLATION

Jusqu'ici, on a construit une fonction F (Proposition 6.10) dont les dérivées $D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F$ sont petites aux points $s\mathbf{u}$, $(\mathbf{j}, s) \in \mathscr{E}$. On va dans ce paragraphe montrer qu'en fait:

— dans le cas non périodique, les dérivées $D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F$ sont petites en beaucoup plus de points, et pour cela extrapoler sur les points;

— dans le cas périodique, les dérivées $D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F$ sont petites à un ordre beaucoup plus élevé le long de $\mathbf{f}_n$, et pour cela extrapoler sur les dérivées.

On obtiendra alors, dans les deux cas, que les $D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})$ sont petits pour $\|\mathbf{j}\| \leqslant (n+1) M$ et $\deg s \leqslant S$.

Le lemme suivant est un analogue de la Proposition 4.27 de [Hir].

LEMME 7.1. *Pour tout* $\mathbf{j} = (j_1, ..., j_n) \in \mathbb{N}^n$ *tel que* $\|\mathbf{j}\| \leqslant n(n+2) M$ *et* $s \in A$ *tel que* $\deg s \leqslant S$, *on a*:

$$\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{w}) - D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})) \leqslant -C_0 U_0/3.$$

Démonstration. Posons $\mathbf{f}_0 = (1, 0, ..., 0)$. Puisque $\mathbf{f}_0 \notin W$ d'après la forme de $\mathscr{L}$ (cf. Proposition 3.3), la famille $\mathbf{f}' = (\mathbf{f}_0, ..., \mathbf{f}_n)$ forme une base de C^{n+1}. Notons $\mathbf{j}' = (0, j_1, ..., j_n)$. Comme $\mathbf{w} - \mathbf{u} = \mathscr{L}(\mathbf{u}) \mathbf{f}_0$, on vérifie facilement que l'on a

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{w}) - D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}) &= D_{\mathbf{f}'}^{\mathbf{j}'} F(s\mathbf{w}) - D_{\mathbf{f}'}^{\mathbf{j}'} F(s\mathbf{u}) \\ &= \sum_{k \geqslant 1} D_{\mathbf{f}'}^{(k, \mathbf{j})} F(s\mathbf{u})\, s^k (\mathscr{L}(\mathbf{u}))^k,\end{aligned}$$

où on a noté $(k, \mathbf{j})$ pour le $(n+1)$-uple $(k, j_1, ..., j_n)$. On en déduit

$$\begin{aligned}&\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{w}) - D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}))\\&\qquad\leqslant \max_{k\geqslant 1} \{\deg(D_{\mathbf{f}'}^{(k,\mathbf{j})} F(s\mathbf{u}))\} + \max_{k\geqslant 1} \{\deg(s^k(\mathscr{L}(\mathbf{u}))^k)\}.\end{aligned}$$

Mais d'après l'Hypothèse 5.4 et la définition de S, on a $S+\deg(\mathscr{L}(\mathbf{u}))\leqslant -C_0 U_0/2$, de sorte que $\deg(s^k(\mathscr{L}(\mathbf{u}))^k)\leqslant \deg(s\mathscr{L}(\mathbf{u}))\leqslant -C_0 U_0/2$ pour tout $k\geqslant 1$. De plus, on a $D_{\mathbf{f}'}^{(k,\mathbf{j})} F(s\mathbf{u})=0$ dès que $k>L_0$, car la fonction $F(z_0, ..., z_n)$ est polynomiale en la variable z_0 de degré $\leqslant L_0$ (cela se voit par exemple à partir des formules (2.6), qui permettent de se ramener à des dérivées par rapport à la base canonique de C^{n+1}). On a donc:

$$\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{w}) - D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}))\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant L_0} \{\deg(D_{\mathbf{f}'}^{(k,\mathbf{j})} F(s\mathbf{u}))\} - C_0 U_0/2.$$

Le Lemme 2.5(1) et la Proposition 5.7 nous donnent maintenant, pour $1\leqslant k\leqslant L_0$:

$$\deg(D_{\mathbf{f}'}^{(k,\mathbf{j})} F(s\mathbf{u}))\leqslant (k+\|\mathbf{j}\|)\, c_4 Dh \log(C_0 U_0) + \max_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \|\boldsymbol{\tau}\|=k+\|\mathbf{j}\|}} \{\deg(D_{\mathbf{e}'}^{\boldsymbol{\tau}} F(s\mathbf{u}))\},$$

où $\mathbf{e}'=(\mathbf{f}_0, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$. Afin de majorer $\deg(D_{\mathbf{e}'}^{\boldsymbol{\tau}} F(s\mathbf{u}))$ pour $\|\boldsymbol{\tau}\|=k+\|\mathbf{j}\|$, on applique la Proposition 2.7, avec ici $X\leqslant c_{12} U_0$ (voir Proposition 6.10). On obtient, par un calcul quasiment identique à celui effectué dans la démonstration du Lemme 6.9: $\deg(D_{\mathbf{e}'}^{\boldsymbol{\tau}} F(s\mathbf{u}))\leqslant c_{13} U_0$. En rassemblant tous les résultats précédents, on aboutit finalement à l'inégalité

$$\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{w}) - D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}))\leqslant c_{14}(L_0+M)\, Dh \log(C_0 U_0) + c_{13} U_0 - C_0 U_0/2,$$

qui nous donne bien le lemme car $L_0\leqslant M$ et $MD\, h \log(C_0 U_0)\leqslant U_0$ d'après le Lemme 4.11. ∎

On déduit de ce lemme le corollaire suivant:

COROLLAIRE 7.2. *Pour tout* $(\mathbf{j}, s)\in\mathscr{E}$, *on a* $\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{w}))\leqslant -C_0 U_0/3$.

Démonstration. C'est immédiat par l'inégalité ultramétrique, la Proposition 6.10 et le Lemme précédent. ∎

Nous pouvons maintenant passer au résultat principal de ce paragraphe.

PROPOSITION 7.3. *Pour tout* $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$ *tel que* $\|\mathbf{j}\| \leqslant (n+1)M$ *et tout* $s \in A$ *tel que* $\deg s \leqslant S$, *on a la majoration*:

$$\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})) \leqslant -U_0/c_{20} \log^+ \delta.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^n$ le n-uple défini par $\mathbf{i} = \mathbf{j}$ dans le cas non périodique, et par $\mathbf{i} = (j_1, ..., j_{n-1}, 0)$ dans le cas périodique. Nous allons tout d'abord établir que pour tout $z \in C$ tel que $\deg z \leqslant S$, on a $\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{i}} F(z\mathbf{w})) \leqslant -U_0/c_{20} \log^+ \delta$. Pour cela, posons $f(z) = D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{i}} F(z\mathbf{w})$ et appliquons la Proposition 2.13 avec S, S_1 et M_1 définis comme aux Paragraphes 4 et 5.1, et avec $R = S + \log_q E$. On obtient, pour tout $z \in C$ tel que $\deg z \leqslant S$ (et avec les notations de la Proposition 2.13):

$$\begin{aligned} \deg(f(z)) \leqslant \max\{ -(\log_q E)\, M_1 q^{S_1+1} + M(f, R), \\ \Upsilon + (S - S_1 + 1)\, M_1 q^{S_1+1}\}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Montrons que l'on peut prendre $\Upsilon = -C_0 U_0/4$, et considérons tout d'abord le cas non périodique. Dans ce cas $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{e}}$, et en écrivant $\mathbf{w} = w_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \cdots + w_n \tilde{\mathbf{e}}_n$, on a

$$\partial^\ell f(z) = \sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^n \\ \|\boldsymbol{\tau}\| = \ell}} \binom{\boldsymbol{\tau} + \mathbf{i}}{\mathbf{i}} D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{i}+\boldsymbol{\tau}} F(z\mathbf{w})\, w_1^{\tau_1} \cdots w_n^{\tau_n}.$$

Le Lemme 5.6 et le Corollaire 7.2 donnent alors, pour $0 \leqslant \ell < M_1$ et $s \in A$, $\deg s \leqslant S_1$:

$$\deg(\partial^\ell f(s)) \leqslant -C_0 U_0/3 + c_4 M\, Dh \log(C_0 U_0) \leqslant -C_0 U_0/4.$$

Dans le cas périodique, on a $\mathbf{w} = \mathbf{f}_n$ et $i_n = 0$, donc $\partial^\ell f(z) = D_{\mathbf{f}}^{(i_1, ..., i_{n-1}, \ell)} F(z\mathbf{w})$, et le Corollaire 7.2 permet de conclure encore à la majoration $\deg(\partial^\ell f(s)) \leqslant -C_0 U_0/4$ $(0 \leqslant \ell < M_1,\ \deg s \leqslant S_1)$. On peut donc bien prendre $\Upsilon = -C_0 U_0/4$ comme annoncé.

Majorons maintenant $M(f, R)$. Pour $z \in C$ tel que $\deg z \leqslant R$ et $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^n$ tel que $\|\boldsymbol{\tau}\| = \|\mathbf{i}\|$, on a, d'après la Proposition 2.7 (et avec les notations de cette proposition):

$$\begin{aligned} \deg(D_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\tau}} F(z\mathbf{w})) \leqslant c_{15} \Big(L_0 D \log B + \|\mathbf{i}\|\, Dh + X + D \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} L_i q^{d_i S} \log V_i \\ + Dh \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} L_i + L_0 S + L_0 \log E \Big), \end{aligned} \tag{7.5}$$

car

$$\Theta_1 = 1, \qquad \log_q \Theta_0 \leqslant D \log B,$$

$$\left|\frac{zu_i}{\omega_i}\right|^{d_i} \leqslant \left(q^R \left|\frac{u_i}{\omega_i}\right|\right)^{d_i} = E^{d_i} \left|\frac{u_i}{\omega_i}\right|^{d_i} q^{d_i S} \leqslant e^d\, D q^{d_i S} \log V_i$$

$$(1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$\log_q \left|\frac{zu_i}{\omega_i}\right| \leqslant \left|\frac{zu_i}{\omega_i}\right| / \log q \leqslant e^d\, D q^{d_i S} \log V_i / \log q \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$\deg(z(u_0 + \mathscr{L}(\mathbf{u}))) \leqslant R + \deg(u_0 + \mathscr{L}(\mathbf{u})) \leqslant R = S + \log_q E.$$

Comme chaque terme du second membre de (7.5) est $\leqslant c_{16}\, U_0/C_0 \log^+ \delta$, on a donc $\deg(D_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\tau}} F(z\mathbf{w})) \leqslant c_{17}\, U_0/C_0 \log^+ \delta$, et par le Lemme 2.5(1) et la Proposition 5.7, il vient $M(f, R) \leqslant c_{18}\, U_0/C_0 \log^+ \delta$.

En revenant alors à l'inégalité (7.4), et en notant que l'on a $(\log E)\, M_1 q^{S_1+1} \geqslant U_0/2 \log^+ \delta$ et $(S - S_1 + 1)\, M_1 q^{S_1+1} \leqslant c_{19} (\log C_0)\, U_0$ (cf. choix des paramètres du Paragraphe 4), on obtient finalement, pour tout $z \in C$ tel que $\deg z \leqslant S$: $\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{i}} F(z\mathbf{w})) \leqslant -U_0/c_{20} \log^+ \delta$. Dans le cas non périodique, cette inégalité jointe au Lemme 7.1 donne immédiatement la conclusion de la proposition. Dans le cas périodique, on applique les inégalités de Cauchy à la fonction f dans le “disque” centré en s: $\{z \in C \mid \deg(z - s) \leqslant S\}$. D'où

$$\deg(\partial^{j_n} f(s)) \leqslant \sup\{\deg(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{i}} F(z\mathbf{w})) \mid \deg(z - s) \leqslant S\} \leqslant -U_0/c_{20} \log^+ \delta.$$

Puisque $\partial^{j_n} f(s) = D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{w})$, on en déduit à nouveau, par le Lemme 7.1, l'inégalité souhaitée. ∎

En utilisant une nouvelle fois le Lemme 2.5(1) et la Proposition 5.7, la Proposition 7.3 permet finalement d'obtenir:

Corollaire 7.6. *Pour tout* $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$ *tel que* $\|\mathbf{j}\| \leqslant (n+1)\, M$ *et tout* $s \in A$ *tel que* $\deg s \leqslant S$, *on a*:

$$\deg(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})) \leqslant -U_0/2c_{20} \log^+ \delta.$$

8. MINORATION ARITHMÉTIQUE

Nous établissons dans ce paragraphe la minoration arithmétique suivante:

Proposition 8.1. *Soient* $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$ *et* $s \in A$ *tels que* $\deg s \leqslant S$ *et* $\|\mathbf{j}\| \leqslant (n+1)\, M$. *On suppose* $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}) \neq 0$. *Alors*

$$\deg(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})) \geqslant -c_{25}\, U_0/C_0 \log^+ \delta.$$

La démonstration de cette proposition va utiliser trois lemmes.

Lemme 8.2. *Soit* $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ *un* A*-module de Drinfeld de rang* $d \geqslant 1$ *défini par*

$$\Phi(T) = T\tau^0 + a_1 \tau + \cdots + a_d \tau^d.$$

On suppose $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ *défini sur une extension finie* K *de* k, *et on note* $e_\Phi(z) = \sum_{m \geqslant 0} c_m z^{q^m}$ *son exponentielle. On définit la suite* $(D_m)_{m \geqslant 0}$ *d'éléments de* A *par* $D_0 = 1$, *et* $D_m = (T^{q^m} - T)\, D_{m-1}^q$ *si* $m \geqslant 1$. *Alors*:

(i) *Pour tout* $m \geqslant 0$, *on a* $\deg D_m = mq^m$.

(ii) *Pour tout* $\ell \geqslant 1$ *et tous* r, $m_1, ..., m_\ell$ *entiers* $\geqslant 0$ *tels que* $q^{m_1} + \cdots + q^{m_\ell} \leqslant q^r$, *on a* $D_{m_1} \cdots D_{m_\ell}$ *divise* D_r.

(iii) *Pour tout* $m \geqslant 0$ *et toute place finie* v *de* K, *on a*

$$-v(D_m c_m) \leqslant q^m \max\{0, -v(a_i), 1 \leqslant i \leqslant d\}.$$

(iv) *Pour tout* $m \geqslant 0$ *et toute place infinie* v *de* K, *on a, en notant* e_v *l'indice de ramification de* K_v *par rapport à* k_∞:

$$-v(D_m c_m) \leqslant q^m \max\{0, -v(a_i), 1 \leqslant i \leqslant d\} + e_v(d-1)\, mq^m.$$

Démonstration. Les assertions (i) et (ii) résultent facilement de la définition de D_m. Prouvons donc (iii) et (iv). L'équation fonctionnelle $e_\Phi(Tz) = \Phi(T)(e_\Phi(z))$ nous donne la relation, pour tout $m \geqslant 1$ (on convient que $c_j = 0$ si $j < 0$):

$$c_m(T^{q^m} - T) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d} a_i c_{m-i}^{q^i}.$$

On obtient donc:

$$c_m D_m = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d} a_i (c_{m-i} D_{m-i})^{q^i} \frac{D_{m-1}^q}{D_{m-i}^{q^i}} \qquad (m \geqslant 1).$$

Comme $D_{m-1}^q / D_{m-i}^{q^i} \in A$, on a $-v(D_{m-1}^q / D_{m-i}^{q^i}) \leqslant 0$ si v est une place finie de K, et $-v(D_{m-1}^q / D_{m-i}^{q^i}) = e_v \deg(D_{m-1}^q / D_{m-i}^{q^i}) = e_v(i-1)\, q^m \leqslant e_v(d-1)\, q^m$ si v est une place infinie. On en déduit aisément par récurrence:

$$\text{si}\quad v \nmid \infty, \qquad -v(D_m c_m) \leqslant (1+q+\cdots+q^{m-1}) \times \max\{0, -v(a_i), 1 \leqslant i \leqslant d\};$$

$$\text{si}\quad v \mid \infty, \qquad -v(D_m c_m) \leqslant (1+q+\cdots+q^{m-1}) \times \max\{0, -v(a_i), 1 \leqslant i \leqslant d\} + e_v(d-1)\, mq^m.$$

Les assertions (iii) et (iv) du lemme en résultent. ∎

LEMME 8.3. *Soient $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ un A-module de Drinfeld de rang $d \geqslant 1$ défini sur une extension finie K de k de degré D, h la hauteur de $(\mathbb{G}_a, \Phi)$, L_0, L et j des entiers vérifiant $L \geqslant 1$, $L_0 \geqslant 0$, et $j \geqslant 0$, et a un élément de C tel que $e_\Phi(a) \in \bar{k}$. On note $\boldsymbol{\alpha}$ le point projectif*

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, (\partial^{j-\mu} e_\Phi^\lambda)(a))_{\substack{\lambda, \mu, 0 \leqslant \lambda \leqslant L, \\ 0 \leqslant \mu \leqslant L_0, \mu \leqslant j}}.$$

Alors $(\partial^{j-\mu} e_\Phi^\lambda)(a)$ appartient à $K(e_\Phi(a))$ pour tout λ, μ, donc $\boldsymbol{\alpha}$ est à coordonnées algébriques, et on a:

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant c_{23}(M \log M + Mh + Lh(e_\Phi(a))),$$

où $M = \max\{1, j\}$.

Démonstration. Pour λ, μ entiers vérifiant $0 \leqslant \lambda \leqslant L$, $0 \leqslant \mu \leqslant L_0$ et $\mu \leqslant j$, on a facilement, en notant $e_\Phi(z) = \sum_{m \geqslant 0} c_m z^{q^m}$ l'exponentielle de $(\mathbb{G}_a, \Phi)$:

$$\begin{aligned}
(\partial^{j-\mu} e_\Phi^\lambda)(a) &= (\partial^{j-\mu}(e_\Phi(z+a))^\lambda)(0) \\
&= \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant \lambda} \binom{\lambda}{\ell} e_\Phi(a)^{\lambda-\ell} (\partial^{j-\mu} e_\Phi^\ell)(0) \\
&= \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant \lambda} \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^\ell \\ q^{m_1}+\cdots+q^{m_\ell} = j-\mu}} \binom{\lambda}{\ell} c_{m_1} \cdots c_{m_\ell} e_\Phi(a)^{\lambda-\ell}.
\end{aligned}$$

Comme les coefficients c_{m_i} sont dans K et que $e_\Phi(a) \in \bar{k}$ par hypothèse, il en résulte immédiatement que $(\partial^{j-\mu} e_\Phi^\lambda)(a)$ est dans $K(e_\Phi(a))$ pour tout (λ, μ). Notons $\boldsymbol{\beta} = (1, c_{m_1} \cdots c_{m_\ell})_{\mathbf{m}}$ le point projectif dont les coordonnées sont l'élément 1 et les produits $c_{m_1} \cdots c_{m_\ell}$, où $1 \leqslant \ell \leqslant L$ et $q^{m_1} + \cdots + q^{m_\ell} = j - \mu$, $0 \leqslant \mu \leqslant \min\{j, L_0\}$. Alors on a: $h(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant h(\boldsymbol{\beta}) + Lh(e_\Phi(a))$. Notons $(D_r)_{r \geqslant 0}$ la suite d'éléments de A définie dans le Lemme 8.2, et soit r le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que $j \leqslant q^r$. Par le Lemme 8.2(ii), on peut écrire $D_r = D_{m_1} \cdots D_{m_\ell} g$, où $g \in A$, et ce pour tout $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_\ell)$ variant comme précédemment.

Pour toute place v de K, on a donc $-v(D_r c_{m_1} \cdots c_{m_\ell}) = -v(D_{m_1} c_{m_1}) - \cdots - v(D_{m_\ell} c_{m_\ell}) - v(g)$. En notant que $-v(g) \leqslant 0$ si $v \nmid \infty$, et $-v(g) \leqslant -v(D_r)$ si $v \mid \infty$, on en déduit, par le Lemme 8.2:

$$-v(D_r c_{m_1} \cdots c_{m_\ell}) \leqslant q^r \max\{0, -v(a_i), 1 \leqslant i \leqslant d\} \qquad \text{si} \quad v \nmid \infty,$$

$$-v(D_r c_{m_1} \cdots c_{m_\ell}) \leqslant q^r \max\{0, -v(a_i), 1 \leqslant i \leqslant d\} + e_v(d-1)\, rq^r - v(D_r) \qquad \text{si} \quad v \mid \infty.$$

En prenant alors le maximum sur tous les $\mathbf{m}$, multipliant par le degré résiduel d_v, sommant sur toutes les places de K, et divisant par D, il vient $h(\boldsymbol{\beta}) = h(D_r \boldsymbol{\beta}) \leqslant \deg D_r + q^r h + (d-1)\, rq^r$. Comme $\deg D_r = rq^r$ (Lemme 8.2(i)) et $r \leqslant c_{21} \log M$, $q^r \leqslant c_{22} M$ par définition de r et M, on obtient donc, en rassemblant tout, la majoration du lemme. ∎

Lemme 8.4. *Soient $(\mathbb{G}_a, \Phi)$ un A-module de Drinfeld de rang $d \geqslant 1$ défini sur une extension finie K de k, et u, s des éléments de C et A respectivement, avec $s \neq 0$. On note $h(\boldsymbol{\Phi})$ la hauteur de $(\mathbb{G}_a, \Phi)$, $\gamma = e_{\Phi}(u)$, $S = \deg s$, et on suppose $\gamma \in K$. Alors $e_{\Phi}(su) \in K$, et on a*:

$$h(e_{\Phi}(su)) \leqslant q^{dS}(h(\gamma) + h(\Phi)).$$

Démonstration. Écrivons $s = \sum_{0 \leqslant j \leqslant S} b_j T^j$, $b_j \in \mathbb{F}_q$. Alors $e_{\Phi}(su) = \Phi(s)(\gamma) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant S} b_j \Phi(T)^j(\gamma)$, ce qui montre déjà que $e_{\Phi}(su) \in K$. Par ailleurs, si l'on écrit $\Phi(T) = a_0 \tau^0 + \cdots + a_d \tau^d$, une récurrence simple montre que l'on a, pour toute place v de K et tout entier $j \geqslant 0$:

$$\max\{0, -v(\Phi(T)^j(\gamma))\} \leqslant \left(\sum_{0 \leqslant i \leqslant j-1} q^{id} \right) \cdot \max\{0, -v(a_i), 0 \leqslant i \leqslant d\} + q^{jd} \max\{0, -v(\gamma)\}.$$

On en déduit:

$$\max\{0, -v(\Phi(s)(\gamma))\} \leqslant q^{dS}(\max\{0, -v(a_i), 0 \leqslant i \leqslant d\} + \max\{0, -v(\gamma)\}),$$

d'où la majoration annoncée. ∎

Démonstration de la Proposition 8.1. Lorsque $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on conviendra de noter $\boldsymbol{\lambda} \leqslant \mathbf{L}$ au lieu de $0 \leqslant \lambda_i \leqslant L_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, et de même, si $\ell = (\ell_1, ..., \ell_n)$ et $\mathbf{j} = (j_1, ..., j_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^n$, on écrira $\ell \leqslant \mathbf{j}$ pour $0 \leqslant \ell_i \leqslant j_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Avec ces notations, le polynôme P construit au Paragraphe 6 s'écrit $P = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \leqslant \mathbf{L}} p_{\boldsymbol{\lambda}} X_0^{\lambda_0} \cdots X_n^{\lambda_n}$, $p_{\boldsymbol{\lambda}} \in K$. Notons $\varepsilon = (\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n)$

la base canonique de C^{n+1}. Comme $\mathbf{e}_i = \beta_i \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, un calcul simple montre que l'on a:

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \leqslant \mathbf{L}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\ell} \leqslant \mathbf{j} \\ \|\boldsymbol{\ell}\| \leqslant \lambda_0}} \frac{(\|\boldsymbol{\ell}\|)!}{\ell_1! \cdots \ell_n!} \binom{\lambda_0}{\|\boldsymbol{\ell}\|} p_{\boldsymbol{\lambda}} \beta_1^{\ell_1} \cdots \beta_n^{\ell_n} (su_0)^{\lambda_0 - \|\boldsymbol{\ell}\|}$$
$$\times \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (\partial^{j_i - \ell_i} e_{\Phi_i}^{\lambda_i})(su_i)$$

(on a noté $\|\boldsymbol{\ell}\| = \ell_1 + \cdots + \ell_n$). Si maintenant pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $\boldsymbol{\alpha}_i$ le point projectif

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (1, (\partial^{j_i - \ell_i} e_{\Phi_i}^{\lambda_i})(su_i))_{\substack{\lambda_i, \ell_i, 0 \leqslant \lambda_i \leqslant L_i, \\ 0 \leqslant \ell_i \leqslant L_0, \ell_i \leqslant j_i}},$$

le Lemme 8.3 montre que $\boldsymbol{\alpha}_i$ est à coordonnées dans K, donc que $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})$ appartient à K, et l'on a:

$$h(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})) \leqslant h(P) + L_0(h(\beta_1) + \cdots + h(\beta_n)) + L_0 h(su_0) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} h(\boldsymbol{\alpha}_i)$$
$$\leqslant c_{24} \Bigg(h(P) + L_0 \log B + L_0 h(su_0) + M \log M + Mh$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} L_i h(e_{\Phi_i}(su_i)) \Bigg).$$

On remarque ensuite que les inégalités suivantes sont satisfaites:

$$h(P) \leqslant c_{11} D_\infty U_0 / C_0 D \log^+ \delta \qquad \text{(Proposition 6.10)},$$
$$L_0 h(su_0) \leqslant L_0 S \leqslant U_0 / C_0 D \log^+ \delta \qquad \text{(Lemme 4.11(vi))},$$
$$L_i h(e_{\Phi_i}(su_i)) \leqslant L_i q^{d_i S} (\log V_i + h)$$
$$\leqslant U_0 / C_0 D \log^+ \delta \qquad \text{(Lemme 8.4 et définition de } L_i),$$
$$L_0 \log B \leqslant U_0 / C_0 D \log^+ \delta \qquad \text{(définition de } L_0, \text{ cf. (4.7))},$$
$$Mh \leqslant U_0 / C_0 D \log^+ \delta \qquad \text{(définition de } M, \text{ cf. (4.2))},$$
$$M \log M \leqslant M \log U_0$$
$$\leqslant U_0 / C_0 D \log^+ \delta \qquad \text{(Lemme 4.11(vii))}.$$

Il en résulte $h(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})) \leqslant c_{25} D_\infty U_0 / C_0 D \log^+ \delta$, d'où, en écrivant l'inégalité de Liouville sous la forme $D_\infty \deg (D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u})) \geqslant -Dh(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}))$ (rappelons que $D_\infty = [K_\infty : k_\infty]$), le résultat. ∎

9. LEMME DE ZÉROS ET CONCLUSION

Nous allons finalement montrer, grâce au lemme de zéros de [Den5], que l'Hypothèse 5.4 faite au Paragraphe 5 conduit à une contradiction. Lorsque $\mathscr{V}$ est un sous-espace de C^{n+1} de base $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m)$ et $f\colon C^{n+1} \to C$ une fonction entière, on dira que f a un zéro en $\mathbf{z} \in C^{n+1}$ à un ordre $\geqslant M$ le long de $\mathscr{V}$ si $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} f(\mathbf{z}) = 0$ pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^m$ vérifiant $\|\mathbf{j}\| < M$ (cette définition est indépendante de la base choisie d'après le Lemme 2.5(1)). Le lemme de zéros de [Den5] (Théorème 1), traduit dans notre situation, peut alors se réécrire de la façon suivante (on notera que l'hypothèse de monotonie sur la suite des degrés partiels du polynôme est supprimée puisque notre T-module G est diagonal, produit de modules de Drinfeld):

Lemme 9.1. *Soit Q un polynôme non nul de $C[X_0, ..., X_n]$, de degré $\leqslant L_i$ par rapport à X_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, et tel que la fonction $Q \circ \exp_G$ s'annule à un ordre $\geqslant (n+1)\, M + 1$ le long de W en les points $s\mathbf{u}$, $s \in A$, $\deg s \leqslant S$. Alors il existe un sous-T-module H de G, distinct de G, tel que*

$$M^{\operatorname{codim}_W(T_H \cap W)} \operatorname{card}(\Gamma(S-n-1) + H/H)\, \mathscr{H}(H; L_0, ..., L_n) \leqslant c_{26} L_0 \cdots L_n.$$

Fin de la démonstration des Théorèmes 1.1 *et* 1.9. Les inégalités de la Proposition 8.1 et du Corollaire 7.6 étant contradictoires lorsque $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}) \neq 0$ (par choix de C_0), on en déduit que la fonction $F = P \circ \exp_G$ construite au Paragraphe 6 vérifie $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{j}} F(s\mathbf{u}) = 0$ pour tout $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^n$ tel que $\|\mathbf{j}\| \leqslant (n+1)\, M$ et tout $s \in A$ tel que $\deg s \leqslant S$. D'après le Lemme 9.1, il existe donc un sous-T-module propre H de G tel que l'on ait, en notant $s = \operatorname{codim}_W(W \cap T_H)$:

$$(M^\sharp)^s \operatorname{card}(\Gamma(S-n-1) + H/H)\, \mathscr{H}(H; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp) \leqslant 2^s c_{26} L_0^\sharp \cdots L_n^\sharp \tag{9.2}$$

(car $M^\sharp \leqslant 2M$ et $\mathscr{H}(H; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp)/L_0^\sharp \cdots L_n^\sharp \leqslant \mathscr{H}(H; L_0, ..., L_n)/L_0 \cdots L_n$). Par la Proposition 4.9(i), il en résulte que nécessairement $T_H \not\subset W$. En particulier, $s = \dim(W/W \cap T_H) = \dim(C^{n+1}/T_H) \geqslant 1$. Par ailleurs, en notant $L_{\max}^\sharp = \max\{L_i^\sharp, 0 \leqslant i \leqslant n\}$, on a $L_0^\sharp \cdots L_n^\sharp / \mathscr{H}(H; L_0^\sharp, ..., L_n^\sharp) \leqslant (L_{\max}^\sharp)^s$. En minorant $\operatorname{card}(\Gamma(S-n-1) + H/H)$ par 1, l'inégalité (9.2) nous donne donc $(M^\sharp)^s \leqslant (c_{27} L_{\max}^\sharp)^s$, d'où $M^\sharp \leqslant c_{27} L_{\max}^\sharp$. Mais ceci est impossible puisque d'après le Lemme 4.11(v) on a $M^\sharp \geqslant C_0 L_i^\sharp$ pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$. On obtient donc une contradiction, montrant finalement que l'Hypothèse 5.4 était absurde. Ainsi, ou bien $\mathbf{u} \in T_{\tilde{H}}$, et dans ce cas, en reprenant la majoration de $\deg \tilde{H}$ obtenue au Lemme 4.10, on obtient le cas (i) du Théorème 1.1 (partie (1)); ou bien $\log_q |\mathscr{L}(\mathbf{u})| \geqslant -C_0 U_0$, et dans ce cas on obtient le cas (ii) du théorème. Comme en outre on a vu qu'on ne peut avoir $\mathbf{u} \in T_{\tilde{H}}$ sous les hypothèses du Théorème 1.9, les Théorèmes 1.1 et 1.9 sont donc démontrés (rappelons que la partie (2) du Théorème 1.1 a été prouvée au Paragraphe 3, Proposition 3.2). ▮

RÉFÉRENCES

[Ami] Y. Amice, "Les nombres p-adiques," Presses Univ. de France, Paris, 1975.

[Ber-Phi] D. Bertrand et P. Philippon, Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs, *Illinois J. Math.* **32** (1988), 263–280.

[Bos-Gün-Rem] S. Bosch, U. Güntzer, et R. Remmert, "Non-Archimedean Analysis," Springer-Verlag, New York/Berlin, 1984.

[Cha] M. Chardin, Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique, *Bull. Soc. Math. France* **117** (1989), 305–318.

[Dav] S. David, Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques, *Mém. Soc. Math. France* **62** (1995).

[Dav-Den] S. David et L. Denis, Isogénie minimale entre modules de Drinfeld, *Math. Ann.* in press.

[Del-Hus] P. Deligne et D. Husemöller, Survey of Drinfeld modules, *Contemp. Math.* **67** (1987), 25–91.

[Den1] L. Denis, Géométrie diophantienne sur les modules de Drinfeld, *dans* "The Arithmetic of Function Fields, Proceedings of the Workshop at the Ohio State University" (D. Goss, D. R. Hayes, et M. I. Rosen, Eds.), pp. 285–302, de Gruyter, Berlin, 1992.

[Den2] L. Denis, Hauteurs canoniques et modules de Drinfeld, *Math. Ann.* **294** (1992), 213–223.

[Den3] L. Denis, Théorème de Baker et modules de Drinfeld, *J. Number Theory* **43** (1993), 203–215.

[Den4] L. Denis, Dérivées d'un module de Drinfeld et transcendance, *Duke Math. J.* **80** (1995), 1–13.

[Den5] L. Denis, Lemmes de multiplicités et T-modules, *Michigan J. Math.* **43** (1996), 67–79.

[Don] P. Dong, Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes p-adiques de nombres algébriques, *Dissertationes Math.* **343** (1995), 1–97.

[Hin] M. Hindry, Autour d'une conjecture de Serge Lang, *Invent. Math.* **94** (1988), 575–603.

[Hir] N. Hirata, Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques, *Invent. Math.* **104** (1991), 401–433.

[Mas-Wüs] D. W. Masser et G. Wüstholz, Estimating isogenies on elliptic curves, *Invent. Math.* **100** (1990), 1–24.

[Phi] P. Philippon, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), 355–383.

[Phi-Wal] P. Philippon et M. Waldschmidt, Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs, *Illinois J. Math.* **32** (1988), 281–314.

[Thi] A. Thiery, Théorème de Lindemann–Weierstrass pour les modules de Drinfeld, *Compositio Math.* **95** (1995), 1–42.

[Yu J1] J. Yu, Transcendence theory over function fields, *Duke Math. J.* **52** (1985), 517–527.

[Yu J2] J. Yu, Transcendence and Drinfeld modules: Several variables, *Duke Math. J.* **58** (1989), 559–575.

[Yu J3] J. Yu, Analytic homomorphisms into Drinfeld modules, *Ann. Math.* **145** (1997), 215–233.

[Yu K] K. Yu, Linear forms in p-adic logarithms, III, *Compositio Math.* **91** (1994), 241–276.