Feuille d'exercices 7 : Géométrie plane (III)

Exercice 1 (construction de cours à connaître).
Tracer un segment $[AB]$. À l'aide de la règle non graduée et du compas, partager ce segment en 5 segments de même longueur.

Exercice 2.
Le pied d'un immeuble se trouve en P, et un observateur se trouve en O. Le sommet de l'immeuble se trouve en S. Le triangle OPS est rectangle en P.
1. On connaît la distance $OP = 10$ m et l'angle $\widehat{POS} = 35°$. Calculer la hauteur de l'immeuble (on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut).
2. On connaît la hauteur de l'immeuble $PS = 40$ m et la distance $OS = 100$ m. Calculer, en degrés, l'angle $\widehat{POS}$: on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 3 (CRPE 2016).

Soit ABC un triangle tel que AB = 65 cm, AC = 56 cm et BC = 33 cm. Soit R le point du segment [AB] tel que AR = 39 cm. La perpendiculaire à [AC] passant par R coupe (AC) en S.

1. Réaliser la figure à l'échelle 1/10.
2. Démontrer que (RS) et (BC) sont parallèles.
3. En déduire la longueur AS.
4. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{ARS}$ arrondie à l'unité.

Exercice 4.
Soient ABC un triangle rectangle en B et H le pied de la hauteur issue de B.
1. a) En exprimant de deux façons différentes $\sin(\widehat{CAB})$, montrer qu'on a la relation $AB \times BC = BH \times AC$.
b) Retrouver autrement ce résultat en exprimant de deux façons différentes l'aire du triangle ABC.
2. On note $\alpha = \widehat{BAH}$ et $\beta = \widehat{HBC}$.
a) Montrer que $\alpha = \beta$.
b) En exprimant de deux façons différentes $\tan \alpha$, montrer qu'on a la relation : $BH^2 = AH \times CH$.

Exercices supplémentaires pour les courageux !

Exercice 1.
Tracer un cercle de centre O et de rayon $2,5$ cm. Soit $[BC]$ un diamètre et A un point du cercle tel que $AB = 3$ cm. Choisir un point quelconque H appartenant à $[BC]$, et construire la perpendiculaire à la droite (AB) qui passe par H. Elle coupe $[AB]$ en I. Tracer la perpendiculaire à la droite (AC) passant par H. Elle coupe $[AC]$ en J.
1. Justifier que ABC est un triangle rectangle.
2. Calculer la longueur AC.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $AIHJ$? Justifier.

Exercice 2 (CRPE 2015).

Dans cet exercice, on prendra 1 cm comme unité de longueur.

On considère un trapèze ABFE rectangle en A et B, c'est-à-dire tel que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires à la droite (AB), et tel que AB = 14 ; AE = 3 ; BF = 9.
Le point M est un point variable sur le segment [AB]. Le but de cet exercice est de déterminer la position de M pour laquelle la valeur de EM + MF est minimale.

1. Construire le trapèze ABFE et le point G, symétrique du point F par rapport à la droite (AB).

2. On appelle P l'intersection des droites (AB) et (EG).
Montrer que pour tout point M de [AB], on a : $\mathrm{EM} + \mathrm{MG} \geq \mathrm{EP} + \mathrm{PG}$.
En déduire que la valeur EM + MF est minimale lorsque M est placé en P.

3. a) Montrer que $\frac{\mathrm{AP}}{14-\mathrm{AP}} = \frac{3}{9}$.

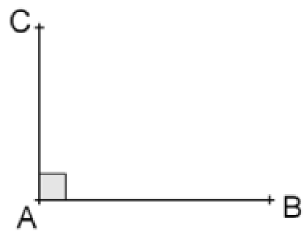
b) Calculer AP.

4. Calculer la valeur minimale de EM + MF. En donner la valeur exacte en cm, et la valeur arrondie au dixième.

Exercice 3 (d'après CRPE 2016).

On donne trois points A, B, C tels que AB = 8 cm, AC = 6 cm ; les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

(*le dessin ci-contre n'est pas à l'échelle*).



On place :

- un point D appartenant au segment [AB] distinct de A et B ;
- le point E, intersection du segment [BC] et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par D ;
- le point F, intersection du segment [AC] et de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par E.

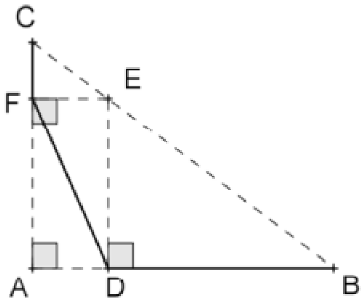


Figure 1

Le but du problème est de déterminer la position du point D pour laquelle la distance DF est minimale.

Partie A – Questions préliminaires

Les deux résultats démontrés dans cette partie pourront être utilisés dans les parties suivantes.

1. Démontrer que BC = 10 cm.
2. Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (on donnera le résultat arrondi à l'unité).
3. Démontrer que AE = DF.

Partie B – Étude analytique du problème

1. **Cas particulier** : on suppose que AD = 3 cm.
   - **a.** Calculer BD, puis en déduire DE.
   - **b.** Montrer que DF = $\sqrt{23{,}0625}$.

2. **Cas général**

Dans cette partie, on pose AD = x.

   - **a.** Quelles valeurs x peut-il prendre ?
   - **b.** Démontrer que DE = $6 - 0{,}75x$.
   - **c.** En déduire que $DF^2 = 1{,}5625x^2 - 9x + 36$.
   - **d.** Vérifier que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question **1.b.**

Partie C – Résolution du problème par une méthode géométrique

1. Construire une droite Δ et un point O n'appartenant pas à Δ. Placer le point H, intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O, puis placer sur la droite Δ un point M distinct de H.

   Expliquer alors pourquoi OH < OM.

2.
   - **a.** Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 8 cm et AC = 6 cm.

     Utiliser la question précédente pour construire le point E sur [BC] de telle sorte que la distance AE est minimale.

     Placer les points D et F de façon à retrouver la configuration de la figure 1, puis tracer le segment [DF].
   - **b.** En exprimant l'aire du triangle ABC de deux façons différentes, déterminer la longueur AE et en déduire la longueur DF.
   - **c.** Calculer la distance AD et conclure par rapport au problème de départ.