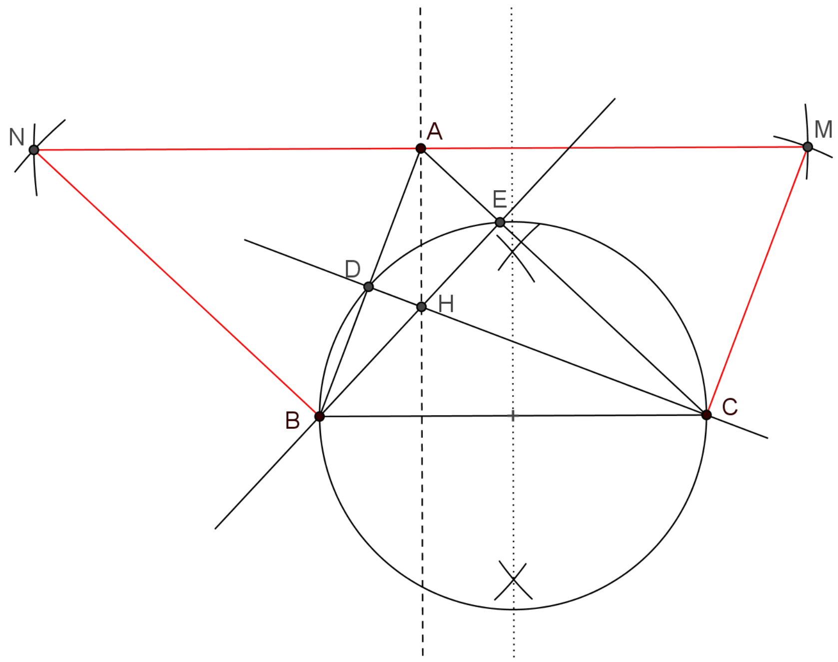
Feuille d'exercices 6 : corrigé des exercices 1 à 7

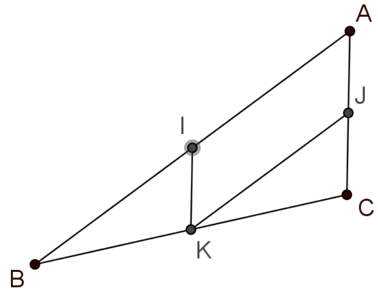
Exercice 1.
1) Voir la figure ci-dessous.



2) Le point D est un point du cercle de diamètre $[BC]$, donc $(CD) \perp (DB)$, et donc $(CD) \perp (AB)$. Donc (CD) est la hauteur du triangle ABC issue de C.
De même, le point E est un point du cercle de diamètre $[BC]$, donc $(CE) \perp (BE)$, et donc $(AC) \perp (BE)$. Donc (BE) est la hauteur du triangle ABC issue de B.
Les deux hauteurs (CD) et (BE) se coupent en H, qui est donc l'orthocentre de ABC. Comme les hauteurs d'un triangle sont concourantes (en l'orthocentre), la droite (AH) est donc la troisième hauteur du triangle ABC. On en déduit que (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
3) Voir figure ci-dessus.
4) Comme $BCMA$ est un parallélogramme, on a $(BC) \mathbin{/\!/} (AM)$, et comme $BCAN$ est un parallélogramme, on a $(BC) \mathbin{/\!/} (NA)$. Puisque A est commun aux droites (AM) et (NA), on en déduit que les points A, N, M sont alignés. D'autre part, comme $BCMA$ et $BCAN$ sont des parallélogrammes, on a $AM = BC = NA$. Il en résulte que A est milieu de $[MN]$.

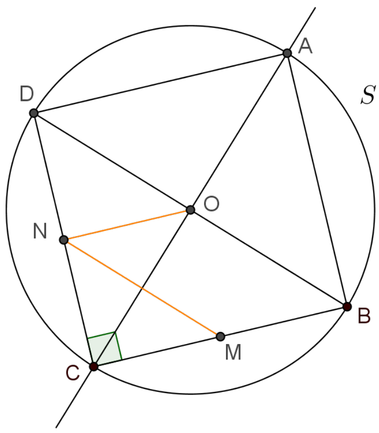
Exercice 2.
1. Dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AB]$ et K est le milieu de $[BC]$. Donc, d'après le théorème des milieux, on a $(IK) \mathbin{/\!/} (AC)$. D'où $(IK) \mathbin{/\!/} (AJ)$. De même, dans le triangle ABC, J est le milieu de $[AC]$ et K est le milieu de $[BC]$, donc $(JK) \mathbin{/\!/} (AB)$, d'où $(JK) \mathbin{/\!/} (AI)$.

Le quadrilatère $AIKJ$ a donc ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme.



2. a) On sait déjà que $AIKJ$ est un parallélogramme d'après 1. C'est donc un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{IAJ}$ est droit, c'est-à-dire si et seulement si ABC est un triangle rectangle en A.
b) On sait que $AIKJ$ est un parallélogramme. C'est un losange si et seulement si les deux côtés consécutifs $[IK]$ et $[KJ]$ ont même longueur. Or, d'après le théorème des milieux comme dans la question 1), on a $IK = AC/2$ et $JK = AB/2$. Donc $AIKJ$ est un losange si et seulement si $AC = AB$, autrement dit si et seulement si ABC est isocèle en A.
c) Un carré est un rectangle et un losange. Donc, d'après les questions a) et b), $AIKJ$ est un carré si et seulement si ABC est rectangle isocèle en A.

Exercice 3.

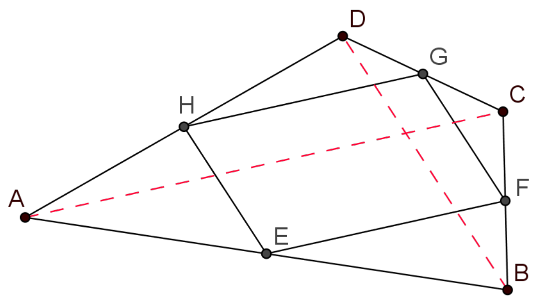


a) O est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD qui est rectangle en C, donc O est le milieu de l'hypoténuse $[BD]$ [(1)]. Le point O est aussi milieu de $[AC]$ (puisque $[AC]$ est un diamètre du cercle S). Le quadrilatère $ABCD$ a donc ses diagonales $[BD]$ et $[AC]$ qui se coupent en leur milieu O, c'est donc un parallélogramme. De plus, $ABCD$ a un angle droit en C donc c'est un rectangle. Enfin, comme les côtés consécutifs $[BC]$ et $[CD]$ ont même longueur, $ABCD$ est un carré.

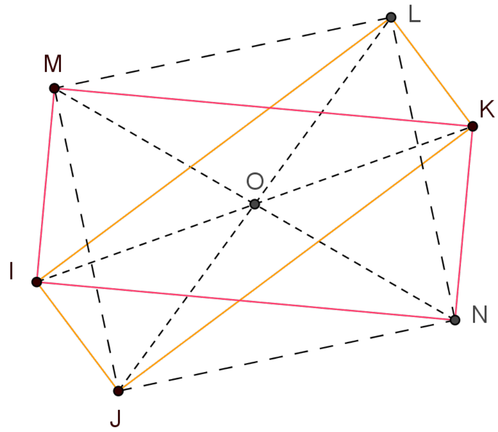
(1). D'après un théorème du cours sur le cercle circonscrit à un triangle rectangle.

b) Dans le triangle BDC, M est le milieu de $[BC]$ et N est le milieu de $[CD]$. Donc, par le théorème des milieux, on a $(MN) /\!/ (BD)$. Donc $BMND$ est un trapèze. De plus, on a $BM = BC/2 = CD/2 = DN$. Donc $BMND$ est un trapèze isocèle.
c) Dans le triangle BCD, O est le milieu de $[BD]$ et N est le milieu de $[CD]$. Donc on a $(ON) /\!/ (BC)$, et ainsi $(ON) /\!/ (BM)$. D'autre part, on a vu que $(MN) /\!/ (BD)$, donc $(MN) /\!/ (BO)$. Le quadrilatère $BMNO$ a donc ses côtés opposés parallèles, donc c'est un parallélogramme.

Exercice 4.
Dans le triangle ABC, E est milieu de $[AB]$ et F est milieu de $[BC]$. Donc, d'après le théorème des milieux, $(EF) /\!/ (AC)$.
D'autre part, dans le triangle ADC, H est milieu de $[AD]$ et G est milieu de $[CD]$. Donc $(HG) /\!/ (AC)$. Il en résulte qu'on a $(EF) /\!/ (HG)$.
De même, en appliquant le théorème des milieux dans les triangles ABD et BCD, on obtient $(EH) /\!/ (BD)$ et $(FG) /\!/ (BD)$, donc $(EH) /\!/ (FG)$.
Comme $(EF) /\!/ (HG)$ et $(EH) /\!/ (FG)$, le quadrilatère $EFGH$ a ses côtés opposés parallèles, donc c'est un parallélogramme.



Exercice 5.

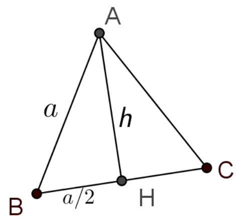


Comme $IJKL$ est un rectangle, ses diagonales $[IK]$ et $[JL]$ se coupent en leur milieu O et ont même longueur : $IK = JL$.

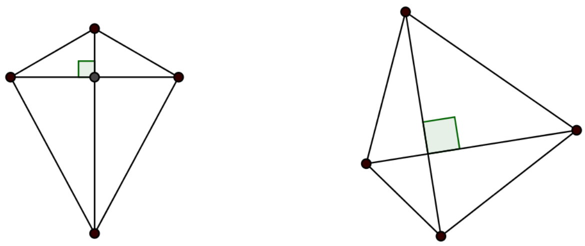
De même, comme $IMKN$ est un rectangle, ses diagonales $[IK]$ et $[MN]$ se coupent en leur milieu et ont même longueur : $IK = MN$.
On en déduit que les diagonales $[JL]$ et $[MN]$ du quadrilatère $MJNL$ ont le même milieu, donc $MJNL$ est un parallélogramme. De plus, ces diagonales ont même longueur ($JL = MN = IK$). Donc le quadrilatère $MJNL$ est un rectangle.

Exercice 6. Soit ABC un triangle équilatéral de côté de mesure a. Soit H le pied de la hauteur issue de A, et soit $h = AH$. Le triangle AHB est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AH^2 + BH^2$, d'où $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$. On en déduit $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$. Ainsi, on obtient :

$$h = a\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Exercice 7.
1. FAUX. En effet, les diagonales de $ABCD$ peuvent être perpendiculaires sans qu'elles se coupent en leur milieu, le quadrilatère n'est alors pas un losange (par exemple ce peut être un cerf-volant). Exemples :



2. VRAI. En effet, soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AB \times CH}{2}$. D'autre part, $[DA]$ est la hauteur issue de D dans le triangle ABD, donc l'aire de ABD est égale à $\frac{AB \times DA}{2}$. Comme on a $CH = DA$ (car $ADCH$ est un rectangle), on en déduit que ces deux aires sont égales.
3. VRAI. En effet, calculons $a^2 + \left(\frac{1}{2}(a^2 - 1)\right)^2$:

$$\begin{aligned} a^2 + \left(\frac{1}{2}(a^2 - 1)\right)^2 &= a^2 + \frac{1}{4}(a^2 - 1)^2 = a^2 + \frac{1}{4}(a^4 - 2a^2 + 1) \\ &= a^2 + \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}.} \end{aligned}$$

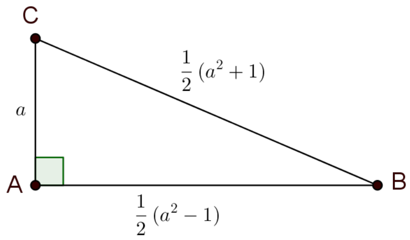
D'un autre côté, on a :

$$\left(\frac{1}{2}(a^2+1)\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2+1)^2 = \frac{1}{4}(a^4+2a^2+1) = \boxed{\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}}\cdot$$

On voit donc qu'on a la relation :

$$a^2+\left(\frac{1}{2}(a^2-1)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(a^2+1)\right)^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle.



4. VRAI.
Première méthode. On a :

$$\frac{1}{9-4\sqrt{5}} = \frac{9+4\sqrt{5}}{(9-4\sqrt{5})\times(9+4\sqrt{5})} = \frac{9+4\sqrt{5}}{9^2-(4\sqrt{5})^2} = \frac{9+4\sqrt{5}}{81-4^2\times 5} = 9+4\sqrt{5},$$

donc l'affirmation est vraie.
Deuxième méthode. On calcule :

$$(9-4\sqrt{5})\times(9+4\sqrt{5}) = 9^2-(4\sqrt{5})^2 = 81-4^2\times 5 = 81-80 = 1.$$

Donc $\dfrac{1}{9-4\sqrt{5}} = 9+4\sqrt{5}$ et l'affirmation est vraie.