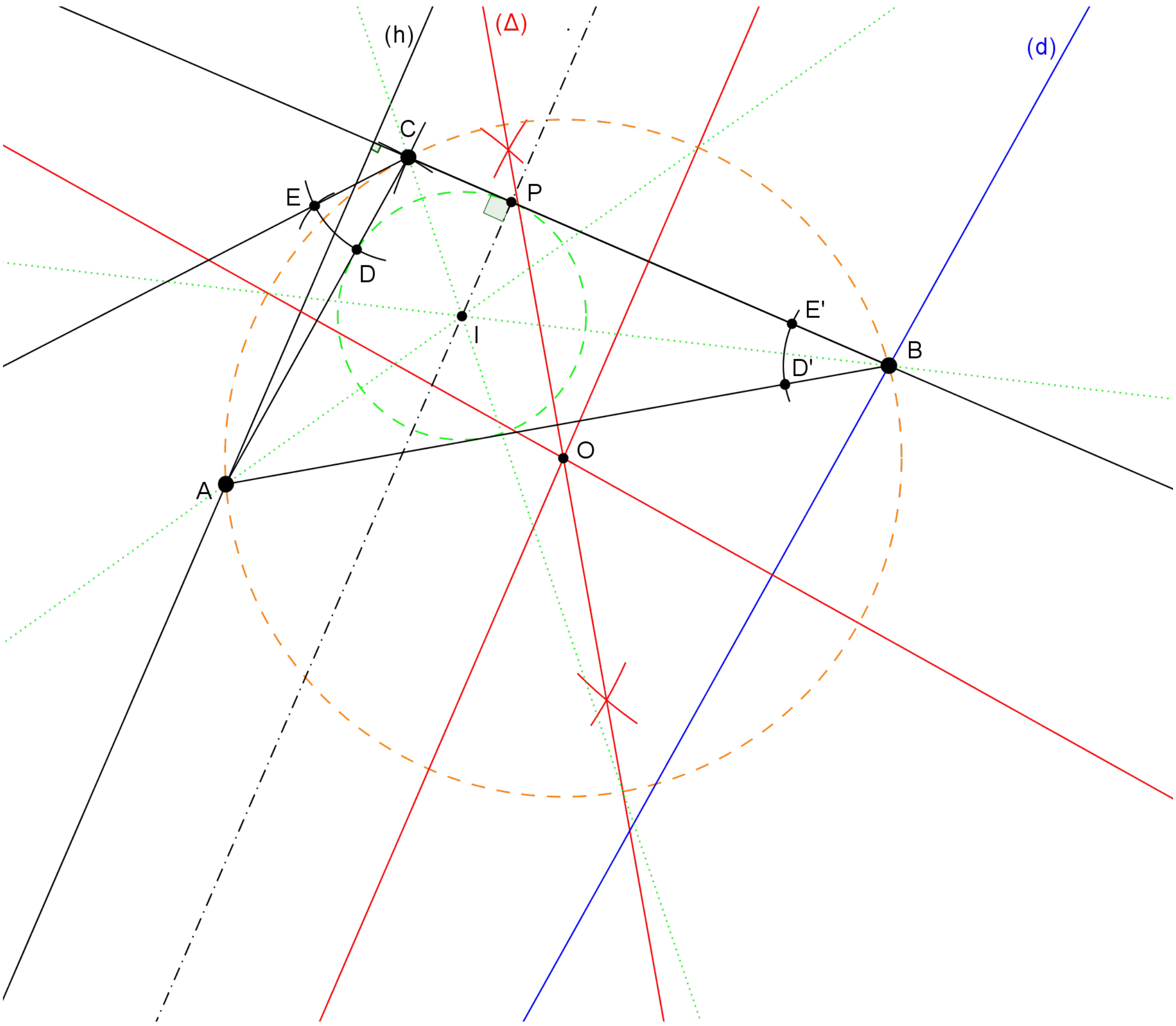
Feuille d'exercices 5 : corrigé des exercices 1 à 9

Exercice 1. Il n'existe pas de tel triangle car $4 + 5 < 10$ (l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée).
(Rappel de cours : dans un triangle ABC, la longueur d'un côté (par exemple BC) est toujours plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés (cette inégalité s'appelle l'inégalité triangulaire) ; ici on devrait donc avoir par exemple $BC < BA + AC$, avec $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 10$, ce qui n'est pas le cas).

Exercice 2.
a) Voir cours. La médiatrice demandée est notée (Δ) et représentée en rouge sur le dessin.
b) Il s'agit de tracer la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A, voir cours. Cette hauteur est notée (h) sur le dessin (les détails de la construction ne figurent pas sur le dessin).
c) Voir cours. La parallèle demandée est notée (d) et représentée en bleu sur le dessin (les détails de la construction ne figurent pas sur le dessin).
d) On commence par tracer un arc de cercle de centre B qui coupe les segments $[AB]$ et $[BC]$ en D' et E' respectivement. L'idée est alors de dessiner un triangle DCE (avec D sur $[AC]$) qui soit superposable (ou *isométrique*) au triangle $D'BE'$.
On trace donc un arc de cercle de centre C et de rayon $BD' = BE'$, qui coupe (AC) en D ; puis un arc de cercle de centre D et de rayon $D'E'$. Les deux arcs de cercle se coupent au point E.
Par construction, les triangles DCE et $D'BE'$ sont isométriques, donc les angles $\widehat{DCE}$ et $\widehat{D'BE'}$ sont égaux.
e) On trace deux médiatrices du triangle (ou les trois), elles se coupent au centre O du cercle circonscrit (les détails de la construction ne figurent pas sur le dessin). Les médiatrices figurent en rouge sur le dessin et le cercle circonscrit est représenté en pointillés rouges.
f) Le cerle inscrit a pour centre l'intersection des bissectrices. On trace donc deux bissectrices (ou trois si l'on veut) selon la méthode du cours (les détails de la construction ne figurent pas sur la figure). Ces bissectrices se coupent au point I centre du cercle. Pour tracer le cercle inscrit (qui doit être *tangent* aux trois côtés), on trace alors la perpendiculaire au côté $[BC]$ (par exemple) passant par I : cette perpendiculaire coupe $[BC]$ au point P. Le cercle de centre I et passant par P est le centre inscrit (représenté en pointillés verts sur la figure).



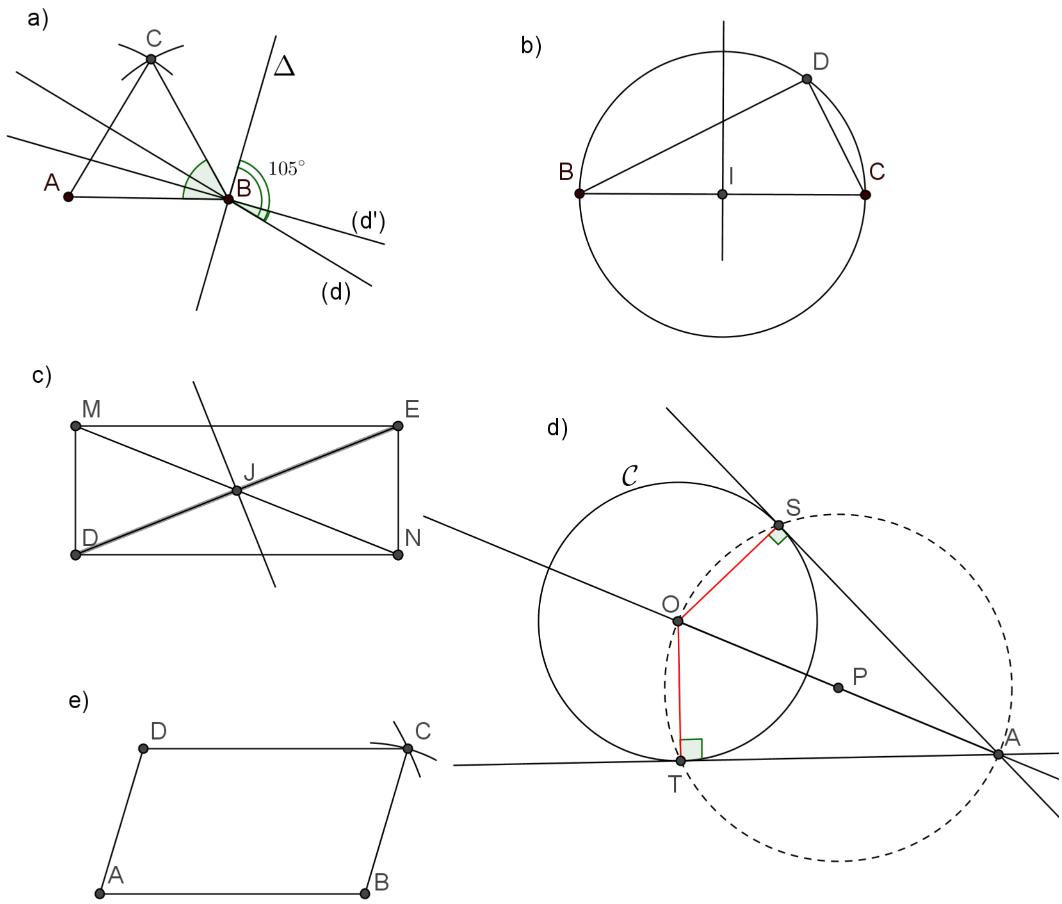
Exercice 4. On se reportera à la figure de l'énoncé (qui devait être reproduite sur la copie en laissant les traits de construction !)

1. Un programme de construction possible est le suivant :
- Tracer un segment $[AB]$.
- Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par B et y placer un point C tel que $BC = AB$.
- Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par A et y placer le point D, du même côté de la droite (AB) que C, tel que $AD = AB$.
- Tracer le segment $[CD]$.
- Tracer le cercle de centre C et de rayon CD et le cercle de centre D et de rayon CD : ils se coupent en deux points, dont l'un seulement est à l'intérieur du carré $ABCD$. Noter E ce point.
- Tracer les segments $[DE]$ et $[EC]$.
- Tracer le cercle de centre B et de rayon CB : il coupe le cercle de centre C et de rayon CB (déjà tracé) en deux points, dont l'un est à l'extérieur du

carré $ABCD$. Noter F ce point.
- Tracer les segments $[BF]$ et $[CF]$.
2. • On a $DE = DC$ car le triangle CED est équilatéral, et $DC = DA$ car $ABCD$ est un carré. Donc $DE = DA$, et par suite le triangle DAE est isocèle en D.
• Déterminons les mesures des angles du triangle DAE. On a d'abord : $\widehat{ADE} = \widehat{ADC} - \widehat{EDC} = 90° - 60° = 30°$. De plus, comme DAE est isocèle en D, on a $\widehat{DAE} = \widehat{AED}$, donc $2\widehat{DAE} + \widehat{ADE} = 180°$ et par suite $\widehat{AED} = \widehat{DAE} = \frac{180°-\widehat{ADE}}{2} = \frac{180°-30°}{2} = 75°$.
• Déterminons les mesures des angles du triangle CEF. On a : $\widehat{ECF} = \widehat{ECB} + \widehat{BCF} = \widehat{ECB} + 60°$. Or, comme précédemment on a $\widehat{ECB} = 90° - 60° = 30°$, d'où $\widehat{ECF} = 30° + 60° = 90°$.
Le triangle CEF est isocèle en C car $CE = CD = CB = CF$, donc $\widehat{CEF} = \widehat{CFE}$, et par suite : $\widehat{CEF} = \widehat{CFE} = \frac{180°-\widehat{ECF}}{2} = \frac{180°-90°}{2} = 45°$.
• Montrons que les points A, E, F sont alignés. On a : $\widehat{AEF} = \widehat{AED} + \widehat{DEC} + \widehat{CEF} = 75° + 60° + 45° = 180°$. Donc les points A, E, F sont alignés.
• Il résulte de ce qui précède que le triangle CEF est rectangle isocèle en C.

Exercice 3. On se reportera aux figures de la page suivante (tous les traits de construction n'apparaissent pas sur les figures).
a) Pour tracer un angle de 60°, il suffit de tracer un triangle équilatéral ABC : l'angle $\widehat{ABC}$ mesure alors 60°. Pour obtenir un angle de 15°, on partage l'angle $\widehat{ABC}$ en deux (*cf.* bissectrice (d)) puis l'angle obtenu encore en deux (*cf.* bissectrice (d')) : l'angle entre (d) et (d') mesure alors $60°/4 = 15°$. Enfin, comme $105 = 90 + 15$, pour tracer un angle de 105°, il suffit de tracer la perpendiculaire Δ à (d') passant par B (*cf.* figure) : l'angle entre Δ et (d) mesure alors 105° $(90° + 15°)$.
b) Plusieurs méthodes sont possibles. Par exemple, on peut tracer un segment $[BC]$, puis le milieu I du segment $[BC]$ (en traçant d'abord la médiatrice de $[BC]$), puis le cercle de diamètre $[BC]$. On prend alors n'importe quel point D de ce cercle qui n'est pas sur la médiatrice de $[BC]$: le triangle BCD est alors rectangle en D et non isocèle.
c) Plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple procéder comme en b) et compléter la figure pour obtenir un rectangle. On peut aussi procéder comme suit. On trace le milieu J du segment $[DE]$ (en traçant la médiatrice de $[DE]$), puis on trace n'importe quel segment $[MN]$ de longueur DE, non perpendiculaire à (DE), et qui a pour milieu J (pour cela on trace une droite passant par J et on place à l'aide du compas les points M et N de part et d'autre de J de sorte que $JM = JN = JD$) : le quadrilatère $DNEM$ est alors un parallélogramme (car ses diagonales se coupent en leur milieu) et ses diagonales ont même longueur, donc c'est bien un rectangle.
d) Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$. On trace d'abord le cercle de diamètre $[OA]$ (représenté en pointillés sur la figure ; il faut pour cela tracer d'abord la médiatrice de $[OA]$ pour en trouver le centre P). Ce cercle coupe le cercle initial

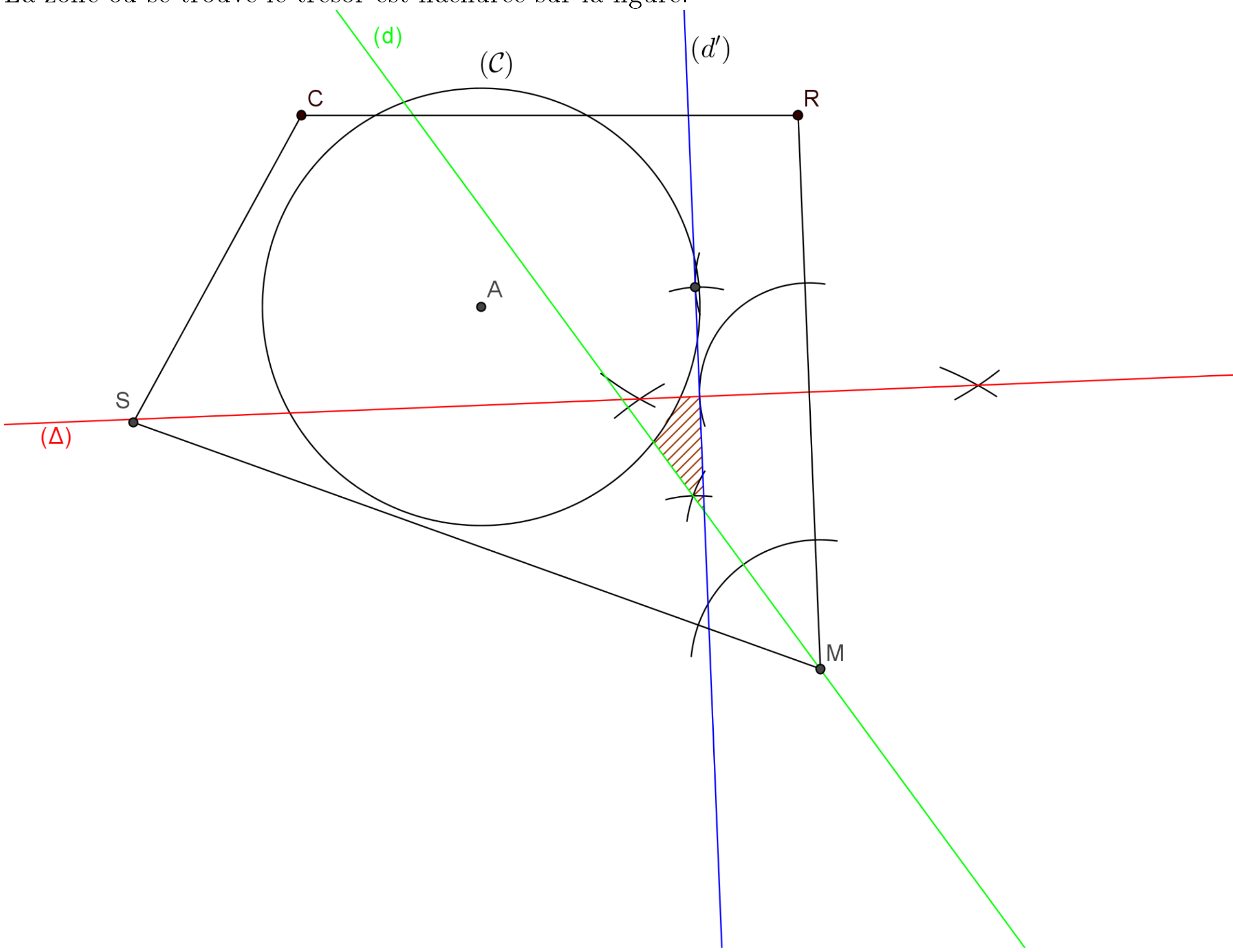
$\mathcal{C}$ en deux points S et T. Alors les triangles OAS et OAT sont rectangles en S et T (d'après une propriété du cours), donc les droites (AS) et (AT) sont perpendiculaires aux rayons $[OS]$ et $[OT]$ de $\mathcal{C}$: ce sont donc bien les tangentes à $\mathcal{C}$ (en S et T).
e) Le dessin est à l'échelle 1/2. On trace un triangle ABC tel que $AB = 7$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 4$ cm. On trace ensuite le point D tel que $AD = 4$ cm et $CD = 7$ cm (comme intersection de deux arcs de cercle). On obtient un parallélogramme $ABCD$ comme demandé.



Exercice 5. Voir la figure ci-dessous.
Le trésor est à plus de 1500 m de l'arbre, donc, sur le plan, il se trouve à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 3 cm.
Il est plus près de M que de R, donc il se trouve dans le demi-plan délimité par la médiatrice de $[MR]$ (notée (Δ) et représentée en rouge sur le dessin), du côté de M [(1)].

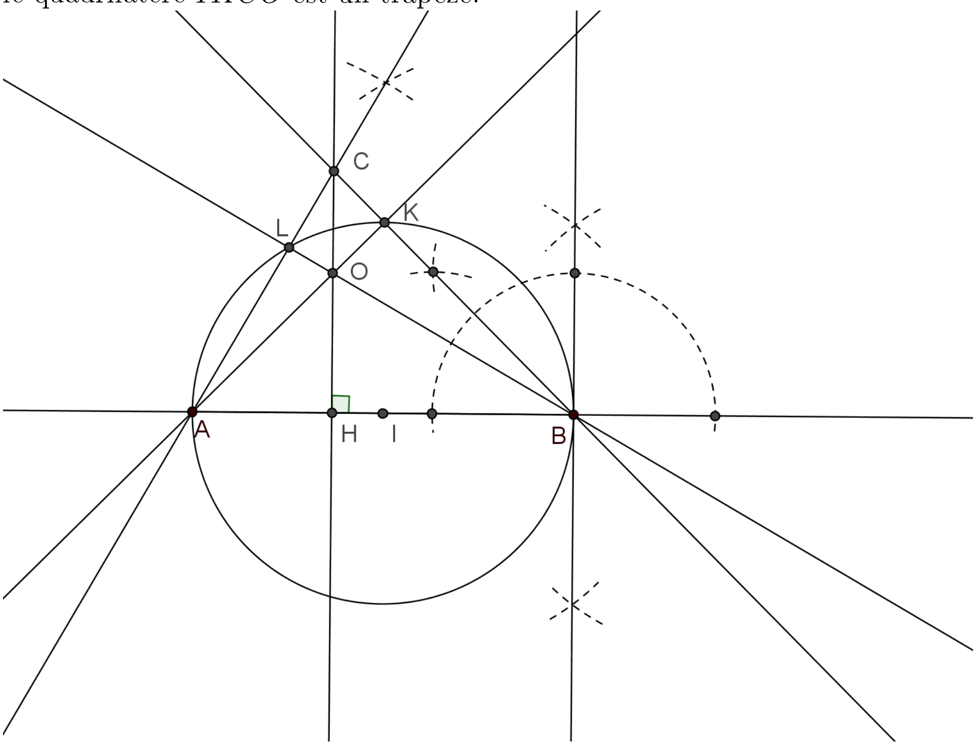
(1). *Rappel : les points de la médiatrice sont équidistants de M et de R.*

Il est aussi plus près de $[MR]$ que de $[MS]$, donc il se trouve dans le demi-plan délimité par la bissectrice de $\widehat{SMR}$ (notée (d) et représentée en vert sur la figure), du côté de R [(2)].
Enfin, il est à plus de 750 m du chemin $[MR]$, donc à plus de $1,5$ cm sur le plan, c'est-à-dire dans le demi-plan délimité par la droite (d'), du côté de A (la droite (d') est la parallèle à (MR) à la distance de $1,5$ cm).
La zone où se trouve le trésor est hachurée sur la figure.



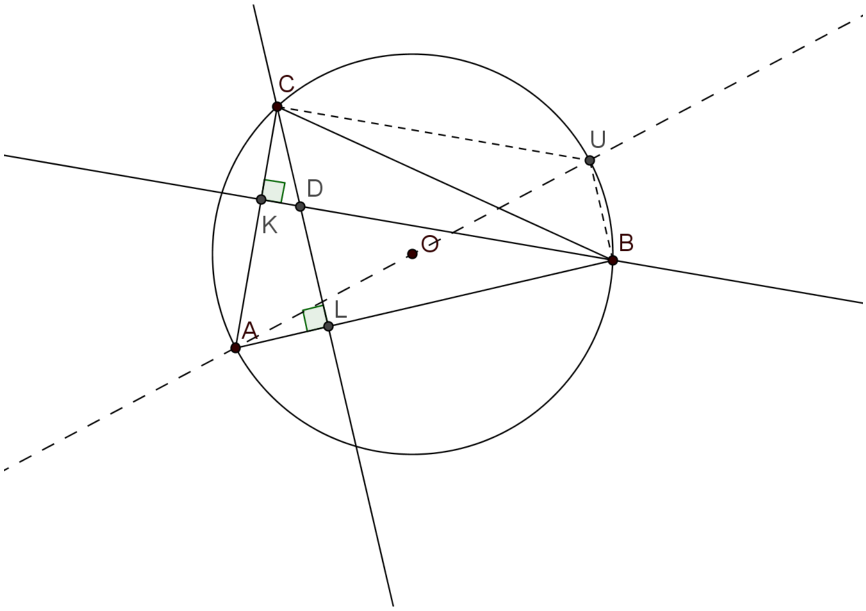
(2). *Rappel : les points de la bissectrice de $\widehat{SMR}$ sont équidistants de $[MR]$ et de $[MS]$.*

Exercice 6.
1) Voir figure ci-dessous.
2) On a $IB = IK$, donc le triangle IBK est isocèle en I. On a donc $\widehat{IKB} = \widehat{IBK} = 45°$. On en déduit que $\widehat{KIB} = 180° - \widehat{IKB} - \widehat{IBK} = 180° - 45° - 45° = 90°$. Donc la droite (KI) est perpendiculaire au segment $[AB]$ en son milieu I, c'est donc la médiatrice de $[AB]$.
3) Comme K est sur le cercle de diamètre $[AB]$, l'angle $\widehat{AKB}$ est droit. Donc $(AK) \perp (BC)$ et la droite (AK) est la hauteur du triangle ABC issue de A. De même, comme L est sur le cercle de diamètre $[AB]$, l'angle $\widehat{ALB}$ est droit. Donc $(BL) \perp (AC)$ et la droite (BL) est la hauteur du triangle ABC issue de B. Le point O, point d'intersection de ces deux hauteurs, est donc l'orthocentre du triangle ABC et se trouve par conséquent sur la troisième hauteur (car les hauteurs d'un triangle sont concourantes). Or, la hauteur issue de C est (CH). Donc les points C, O, H sont alignés.
4) On a $(KI) \perp (AB)$ d'apès la question 2, et $(CO) \perp (AB)$ d'après la question 3. Donc les droites (KI) et (CO) sont parallèles. On en déduit que le quadrilatère $IKCO$ est un trapèze.



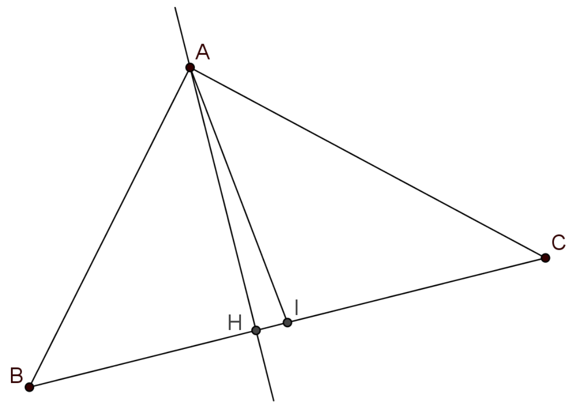
Exercice 7. • Comme B est sur le cercle de diamètre $[AU]$, le triangle AUB est rectangle en B. Donc <u>(UB) est perpendiculaire à (AB)</u>.
• On sait que $(CL) \perp (AB)$ et $(UB) \perp (AB)$, donc $(CL) \mathbin{/\!/} (UB)$, d'où <u>$(CD) \mathbin{/\!/} (UB)$</u>.
De même, on a $(UC) \perp (AC)$ car C est sur le cercle de diamètre $[AU]$, et on sait aussi que $(BK) \perp (AC)$. On en déduit $(UC) \mathbin{/\!/} (BK)$, d'où

$(UC) \parallel (BD)$.
Le quadrilatère $DBUC$ a donc ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme.



Exercice 8. L'aire du triangle ABF est égale à : $\mathcal{A}_{ABF} = \frac{BF \times AB}{2}$.
Le triangle AFC a pour base $[FC]$ et pour hauteur $[AB]$, donc son aire est égale à $\mathcal{A}_{AFC} = \frac{FC \times AB}{2}$. Comme $FC = BF$, on en déduit $\mathcal{A}_{AFC} = \mathcal{A}_{ABF}$.
De la même façon, le triangle ADE a pour aire $\mathcal{A}_{ADE} = \frac{DE \times AD}{2}$, et le triangle AEC a pour aire $\mathcal{A}_{AEC} = \frac{EC \times AD}{2}$. Comme $DE = EC$, on en déduit que $\mathcal{A}_{ADE} = \mathcal{A}_{AEC}$.
Maintenant, on a : $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABF} + \mathcal{A}_{AFC} = 2\mathcal{A}_{ABF}$, et de même : $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{ADE} + \mathcal{A}_{AEC} = 2\mathcal{A}_{ADE}$. Comme $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$ (la moitié de l'aire du rectangle), on en conclut que $\mathcal{A}_{ABF} = \mathcal{A}_{ADE}$.
Finalement, on obtient que les aires sont égales : $\boxed{\mathcal{A}_{ABF} = \mathcal{A}_{AFC} = \mathcal{A}_{ACE} = \mathcal{A}_{AED}}$.

Exercice 9.
1) Soit ABC un triangle, et soit I le milieu de $[BC]$ (voir dessin ci-après). Démontrons que les aires $\mathcal{A}_{ABI}$ et $\mathcal{A}_{AIC}$ des triangles ABI et AIC sont égales : soit H le pied de la hauteur issue de A. L'aire de ABI est égale à $\mathcal{A}_{ABI} = \frac{BI \times AH}{2}$, et celle de AIC est égale à $\mathcal{A}_{AIC} = \frac{IC \times AH}{2}$. Comme $BI = IC$, on obtient $\mathcal{A}_{ABI} = \mathcal{A}_{AIC}$. Donc la médiane $[AI]$ partage le triangle ABC en deux triangles de même aire.
2) Le segment $[BN]$ est une médiane du triangle ABM, donc d'après la question 1 les aires $\mathcal{A}_{BAN}$ et $\mathcal{A}_{BMN}$ sont égales. De même, $[CN]$ est une médiane du triangle ACM, donc $\mathcal{A}_{CAN} = \mathcal{A}_{CMN}$. On en déduit que l'aire de la surface hachurée est égale à $\mathcal{A}_{BMN} + \mathcal{A}_{CMN} = \mathcal{A}_{BAN} + \mathcal{A}_{CAN}$, c'est-à-dire à l'aire de la surface blanche. Donc les deux aires sont gales.


A
C
H
I
B