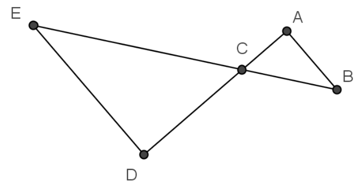
Devoir : corrigé

Exercice 1. 1.a. On a :

$$\frac{CA}{CD} = \frac{3}{8,4-3} = \frac{3}{5,4} = \frac{30}{54} = \frac{5}{9} \quad \text{et} \quad \frac{CB}{CE} = \frac{4,5}{12,6-4,5} = \frac{4,5}{8,1} = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}.$$

On a donc $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$. Comme les points A, C, D et B, C, E sont alignés dans le même ordre, on en déduit, d'après la réciproque du théorème de Thalès, que les droites (AB) et (ED) sont parallèles.



1.b. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CED}$ sont alternes-internes puisque (AB) est parallèle à (DE), donc ils sont égaux.
2.a. Comme le triangle ABC est rectangle en A, son aire est égale à $\frac{AB \times AC}{2}$.
Calculons AB. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, on a : $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 4,5^2 - 3^2 = 20,25 - 9 = 11,25$, donc $AB = \sqrt{11,25}$.
On en déduit que l'aire du triangle ABC est égale à

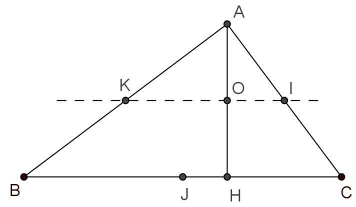
$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{11,25} \times 3}{2} \approx 5 \text{ cm}^2 \text{ (au cm}^2 \text{ près).}$$

2.b. On a vu à la question 1.a que le coefficient d'agrandissement est égal à $k = CD/CA = 9/5 = 1,8$. L'aire est donc multipliée par $k^2 = 3,24$. Donc l'aire du triangle EDC est, au cm^2 près : $\sqrt{11,25} \times (3/2) \times 3,24 \approx 16$ cm^2.

Exercice 2. 1. On a d'une part $BC^2 = 360000$, et d'autre part $AB^2 + AC^2 = 480^2 + 360^2 = 360000$. On a donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.
2.a. Comme le triangle ABC est rectangle en A, son aire est égale à $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{480 \times 360}{2} = 86\,400$ m^2.
2.b. Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A. On sait que la distance du point A à la droite (BC) est la distance AH.
Pour calculer AH, on exprime l'aire du triangle ABC en prenant $[BC]$ comme base : la hauteur correspondante est $[AH]$, donc l'aire du triangle est égale à

$$86\,400 = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{600 \times AH}{2}.$$

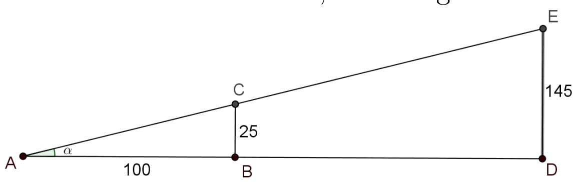
On en déduit $AH = \frac{86\,400 \times 2}{600} = 288$ m.



3. Le point J est équidistant des points A, B, C, c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Ce triangle étant rectangle, on sait que le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse. Donc J est le milieu de $[BC]$.
4. D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, la droite (JK), qui joint les milieux J et K de $[BC]$ et $[AB]$, est parallèle à la droite (AC). Comme de plus $(AC) \perp (AB)$, on en déduit que $(JK) \perp (AB)$, donc $(JK) \perp (AK)$.
De même, d'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, la droite (IJ) est parallèle à la droite (AB). Comme $(AB) \perp (AC)$, on en déduit que $(IJ) \perp (AC)$, donc $(IJ) \perp (AI)$.
Le quadrilatère $AKJI$ a donc trois angles droits (en A, K et I), c'est donc un rectangle.
Méthode 2 : J est le centre du cercle circonscrit à ABC, donc c'est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC. Comme I appartient à la médiatrice de $[AC]$ (car c'est le milieu de $[AC]$), (IJ) est donc la médiatrice de $[AC]$. De même, (JK) est la médiatrice de $[AB]$. On a donc $(IJ) \perp (AC)$ et $(JK) \perp (AB)$. Le quadrilatère $AKJI$ a donc trois angles droits (en A, K et I), c'est donc un rectangle.
Méthode 3 : D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, on a $(JK) /\!/ (AC)$, donc $(JK) /\!/ (IA)$. De même, d'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, on a $(IJ) /\!/ (AB)$, donc $(IJ) /\!/ (AK)$. Le quadrilatère $AKJI$ a donc ses côtés opposés parallèles, donc c'est un parallélogramme. Comme de plus l'angle $\widehat{KAI}$ est droit, c'est un rectangle.
5. D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, on a $(KI) /\!/ (BC)$. La droite (KI) est donc parallèle à la droite (BH) et passe par le milieu K de $[AB]$. Donc, d'après la réciproque du théorème des milieux dans le triangle ABH, la droite (KI) coupe le côté $[AH]$ en son milieu (disons O). De plus, la droite (KI) est perpendiculaire à (AH) (car $(KI) /\!/ (BC)$ et $(BC) \perp (AH)$). Il en résulte que la droite (KI) est perpendiculaire à $[AH]$ en son milieu, donc c'est la médiatrice de $[AH]$. Donc, si l'infirmière se déplace sur le segment $[KI]$, elle reste à égale distance des points A et H.

Exercice 3.
1. On a :
$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Donc, avec la calculatrice on trouve $\alpha \approx 14°$ (au degré près).
2. On a le schéma suivant, où il s'agit de calculer AE :



Première méthode : On calcule d'abord le déplacement horizontal AD. D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$, donc $AD = \frac{AB \times DE}{BC} = \frac{100 \times 145}{25} = 580$. On applique maintenant le théorème de Pythagore dans le triangle ADE rectangle en D. On obtient : $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 580^2 + 145^2 = 357\,425$, donc $AE = \sqrt{357\,425} \approx 598$ m (au mètre près).
Deuxième méthode : On a, dans le triangle ADE : $\sin\alpha = \frac{145}{AE}$, donc $AE = \frac{145}{\sin\alpha}$. On calcule alors AE à l'aide de la calculatrice, mais sans utiliser la valeur approchée de la question 1 (qui est trop grossière), mais en reprenant la valeur très précise pour α donnée par la calculatrice à la question 1 : $\alpha = \arctan(14) \approx 14,03624347$ (NB : sur certaines calculatrices, il est écrit $\tan^{-1}(14)$ au lieu de $\arctan(14)$). On trouve : $AE \approx 598$ m (au mètre près).

Remarque : la première méthode donne une valeur exacte et est donc meilleure ; la seconde méthode ne marche pas en utilisant la valeur approchée $\alpha \approx 14$ de la question 1 (car les erreurs d'approximations se cumulent) : avec cette seconde méthode, il faut impérativement conserver la valeur de α qui est en mémoire dans la calculatrice.